ELEMENTI D' ALGEBRA.

ELEMENTI

DI

ALGEBRA

PER USO

DELLA SCUOLA CENTRALE DELLE QUATTRO NAZIONI

DI S. F. LACROIX

TRADOTTI IN ITALIANO SULLA DECIMAQUINTA EDIZIONE DI PARIGI

CON ANNOTAZIONI ED AGGIUNTE

DI

Salvatore de Angelis.

SECONDA EDIZIONE.

NAPOLI
Presso Gaetano Migliaccio e Vincenzo Priggiobba
Nel Chiostro di S. Pietro a Majella.
1842.

AVVERTIMENTO.

La prima versione degli Elementi d'Algebra del Signor Lacroix, stampata in Napoli nel 1835, venne eseguita sulla decimaterza edizione di Parigi; questa seconda è stata fatta con accuratezza maggiore sull'edizione decimaquinta, la quale, essendo l'ultima venuta in luce sin'oggi riveduta e corretta dall'autore, ed anche in alcuni luoghi ritoccata, è certamente più pregevole delle precedenti.

Per meglio illustrare questa reputata istituzione, ed in pari tempo renderla più compiuta, le poche note ed aggiunte che nella prima versione furono poste a piè di pagina o interpolate nel testo, si sono nella presente ristampa considerabilmente aumentate; ma per non alterare l' originale, e singolarmente per ottenere il vantaggio di disporle in un sol corpo di dottrina, si sono tutte collocate alla fine dell'opera.

I particolari di queste nuove note ed aggiuzioni si leggono nell'indice corrispondente: la loro utilità, e gli obbietti particolari cui si è mirato nel distenderle, sono dichiarati nell'introduzione ad esse.

Gli errori di stampa, anche minimi, incorsi nel testo, si trovano corretti nella pagina seguente; quelli nelle annotazioni, alla fine delle medesime.

Pagina	Linea	ERRORI	CORREZIONI
8,	33,	cioè,	cioè
11,	26,	nei 3 e 6,	nei numeri 3 e 6
14,	41,	esservare,	osservare
16,	19,	come moltiplica,	come moltiplicata.
19,	25,	$3\frac{1}{4}$	$3\frac{3}{4}$
30,	4,	in nota, $abc \times cd \times f$,	$abc \times de \times f$
35,	43,	un' altro,	un altro
43,	35,	pel numaratore,	pel numeratore
48,	31,	$+b^2$,	$+b^3$
50,	37,	$-4a^2b^2$,	$-4a^3b^2$
ibid.	39,	ermini,	termini
52,	16,	ralative,	relative
ibid.	19,	quaste	questo
56,	20,	$a^2c+ac^2+ad^2+d^3$,	$a^2c+ac^2-ad^2-d^3$
116,	25,	$a^2=22900$	$a^2=220900$
142,	8,	nagativo,	negativo
143,	28,	cos:,	così:
146,	17,	avorato,	lavorato
159,	7,	$4a^2c+Sb^3$,	$4a^2c+3b^3$
160,	36,	daltronde,	d' altronde
168,	28,	no	nel
172,	14,	$(x+a)(a+b)(x+c)$	$(x+a(x+b)(x+c)$
174,	4,	in nota, ovvero m^2,	ovvero m^3
184,	8,	149,	148
193,	19,	$a-^{m-1}x$	$a^{m-1}x$
195,	26,	$y=\frac{1-\sqrt{-3}}{2}$,	$y=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$
207,	29,	$\sqrt[5]{ac^3}$,	$\sqrt[5]{a^2c^3}$
212,	5,	in nota, $\sqrt[4]{\ }^{-1}$,	$\sqrt[4]{-1}$
225,	32	in nota, $-b^3$,	$-b^4$
228,	8,	$c^2(n^2-x)^2$,	$c^2(n^2-x^2)^2$
ibid,	31,	$-c^2y$,	$-cy^2$
ibid.,	33,	$-c^2y$,	$-cy^2$
239,	14,	Tx	$+Tx$
287,	6,	$\sqrt[n]{c}$,	$\sqrt[m]{c}$
ibid.,	8,	$\sqrt[n]{b}$,	$\sqrt[m]{b}$
306,	18,	in nota, volore,	valore
313,	35,	$a-^x$,	a^{-x}
314,	10,	$lA-lB$'	$lA-lB$,
319,	4,	Se se,	Se
226,	1,	un annualità,	un' annualità
ibid.,	25,	$\frac{a}{(1+r)}n$	$\frac{a}{(1+r)^n}$
326,	29,	all' epoca n alla,	all' epoca nella
327,	18,	distauza,	distanza

TAVOLA.

A

Delle proporzioni, e delle progressioni, 280

Teoria delle quantità esponenziali e dei logaritmi, 300

Alfabeto per facilitare la lettura dei calcoli in cui si fa uso delle lettere greche.

Α, α	Alfa.
Β, β, ϐ	Beta.
Γ, γ	Gamma.
Δ, δ	Delta.
Ε, ε	Epsilon.
Ζ, ζ	Zeta.
Η, η	Eta.
Θ, θ	Teta
Ι, ι	Iota.
Κ, κ	Cappa
Λ, λ	Lamnda
Μ, μ	Mi.
Ν, ν	Ni.
Ξ, ξ	Xi.
Ο, ο	Omicron.
Π, π, ϖ	Pi.
Ρ, ρ	Ro.
Σ, σ, ς	Sigma.
Τ, τ, ...	Tau.
Υ, υ	Ypsilon.
Φ, φ	Fi.
Χ, χ	Chi.
Ψ, ψ	Psi.
Ω, ω	Omega.

ELEMENTI

DI

ALGEBRA.

NOZIONI PRELIMINARI

CHE SERVONO DI PASSAGGIO DALL' *ARITMETICA* ALL' *ALGEBRA*; SPIEGAZIONE ED USO DEI SEGNI ALGEBRICI.

1. *Nel Trattato elementare di Aritmetica* ha dovuto certamente osservarsi, che la soluzione di parecchie quistioni si compone di due parti; delle quali una ha per oggetto d' investigare a quali delle quattro *operazioni fondamentali* si rapporta la determinazione del numero ignoto per mezzo dei numeri dati, e l' altra, l' applicazione di queste regole. La prima parte, indipendente da qualunque maniera di scrivere i numeri e da qualsivoglia sistema di numerazione, consiste interamente nello sviluppo delle conseguenze che risultano esplicitamente o implicitamente dall' enunciato, o sia dal modo col quale questo enunciato lega i numeri cogniti ai numeri ignoti, cioè, dalle relazioni che esso stabilisce tra questi numeri. In generale, allorchè tali relazioni non sono punto complicate, si può trovare il valore dei numeri incogniti col semplice ragionamento. A tal fine bisogna decomporre le condizioni che racchiudono le relazioni enunciato, traducendo queste relazioni in una serie di frasi equivalenti, delle quali l' ultima dev' esser concepita in questi termini: *L' incognita eguaglia la somma, o la differenza, o il prodotto, o il quoziente, ec., di tali e tali altre grandezze.* L' esempio seguente rischiarerà tutto ciò che queste nozioni generali potrebbero contenere di oscuro.

Dividere un numero dato in due parti tali, che la prima superi la seconda d' un dato eccesso.

Per riuscirvi, si osserverà 1.° che

La parte maggiore è uguale alla minore, più l' eccesso dato,

e che, per conseguenza, se la parte minore fosse cognita, aggiungendole quest' eccesso, otterrebbesi la maggiore:

2.° che

La parte maggiore unita alla minore forma il numero da dividersi.

Sostituendo in quest'ultima frase alle parole: *la parte maggiore*, l'espressione equivalente riportata qui sopra, cioè: *la parte minore, più l'eccesso dato*, si trova che

La parte minore, più l'eccesso dato, più ancora la parte minore formano il numero da dividersi.

Ma allora la frase può essere abbreviata, enunciandola così:

Due volte la parte minore una con l'eccesso dato formano il numero da dividersi;

e se ne conchiude necessariamente che

Due volte la parte minore è uguale al numero da dividersi, diminuito dell' eccesso dato:

dunque

Una volta la parte minore è uguale alla metà della differenza tra il numero da dividersi e l'eccesso dato,

Ovvero, il che torna lo stesso,

La parte minore è uguale alla metà del numero da dividersi, meno la metà dell' eccesso dato.

Ecco dunque il problema proposto risoluto, giacchè, per ottenere le parti cercate, non bisogna fare che operazioni puramente aritmetiche sopra numeri cogniti.

Se, per esempio, il numero da dividersi fosse 9, e l'eccesso della parte maggiore sulla minore, 5, la parte minore sarebbe, giusta la regola trovata di sopra, eguale a $\frac{9}{2}$ meno $\frac{5}{2}$, ovvero a $\frac{4}{2}$, o finalmente a 2; e la maggiore, composta della minore più l'eccesso 5, sarebbe uguale a 7.

2. I ragionamenti, semplicissimi nel problema proposto qui sopra, ma complicatissimi in altri, componendosi in generale d'un certo numero di espressioni, come *aggiunto ad*, *diminuito di*, *è uguale ad*, ec., ripetute frequentemente, e dipendenti dalle operazioni per le quali le grandezze, che entrano nell'enunciato del problema, son legate tra loro, egli è chiaro che si abbrevierebbe di molto, rappresentando ciascuna di queste espressioni con un segno: or questo appunto si pratica, e nel modo seguente.

Per indicare l'addizione si fa uso del segno $+$, che significa *più*.

Per la sottrazione s'adopera il segno $-$, che significa *meno*.

Per la moltiplicazione s'impiega il segno $\times$, che significa *moltiplicato per*.

Per indicare che due quantità deggiono esser divise l'una

per l'altra, si situa la seconda sotto la prima, e si separano con una linea: così $\frac{5}{4}$ significa 5 *diviso per* 4.

Finalmente per denotare che due quantità sono eguali, si pone tra le loro espressioni il segno $=$, che significa *uguale*.

Queste abbreviazioni, benchè rilevantissime, non sono ancora bastanti, perchè rimane a ripetere spesso *il numero da dividersi*, *il numero dato*, *ec.*, *la parte minore*, *il numero cercato*, *ec.*, il che allunga molto il discorso. Intanto, riguardo alle quantità date, l'espediente che si è offerto il primo, è stato di prendere, per rappresentarle, numeri individuati che servano d'esempio, come si pratica in Aritmetica; ma la cosa non essendo possibile rispetto ai numeri incogniti, fu ad essi sostituito un segno di convenzione, il quale ha variato col tempo. Finalmente è stato convenuto d'impiegare le lettere dell'alfabeto; quasi sempre si fa uso delle ultime, come appunto in Aritmetica si mette un x per il quarto termine d'una proporzione, della quale non si conoscano che i tre primi: dall'uso di questi segni risulta l'*Algebra*.

Avvalendomi di questi mezzi, riprendo il problema del n.° 1., e rappresento l'incognita, cioè il numero minore, con una lettera, con x, per esempio; il numero da dividersi e l'eccesso dato coi due numeri 9 e 5; allora la maggiore delle parti cercate sarà espressa da $x+5$, e la loro somma da $x+5+x$: si avrà dunque

$$x+5+x=9;$$

e scrivendo $2x$ pel doppio della quantità x, ne risulterà

$$2x+5=9.$$

Questa espressione mostrando che bisogna aggiungere 5 al numero $2x$ per aver 9, ne conchiuderò che $2x=9-5$, ovvero che $2x=4$, o che finalmente $x=\frac{4}{2}=2$.

Confrontando adesso ciò che significano le frasi abbreviate, che ho scritto per mezzo dei segni convenuti, con quelle che mi hanno condotto alla soluzione col solo ragionamento, si vedrà che le prime non sono che la traduzione delle altre in linguaggio algebrico.

Il numero 2, resultamento delle operazioni precedenti, non conviene che all'esempio particolare che ho scelto; laddove il ragionamento solo, insegnandoci che *la parte minore è uguale alla metà del numero da dividersi*, *meno la metà dell'eccesso dato*, fa vedere come il numero incognito si compone coi numeri dati, e somministra una regola, per mezzo della quale si pos-

sono risolvere tutti i casi particolari compresi nel problema enunciato.

Questo vantaggio del ragionamento, impiegato solo, dipende da ciò, che non indicando alcun numero in particolare, i numeri dati passano senz' alterazione da una frase all'altra, mentre considerando numeri individuati, si effettuano, a misura che si presentano, tutte le operazioni sopra questi numeri; e quando si è ottenuto il risultamento, non resta alcuna traccia del come il numero 2, al quale si può giungere con un' infinità d' operazioni differenti, sia stato formato per mezzo dei numeri dati 9 e 5.

3. Si eviteranno questi inconvenienti rappresentando *il numero da dividersi e l'eccesso dato* con caratteri indipendenti da qualunque valore particolare, e sopra i quali non si possa per conseguenza effettuare alcun calcolo. Le *lettere* dell'alfabeto sono adattatissime a quest'uso; ed il problema proposto può col mezzo loro enunciarsi così:

Dividere un numero cognito, rappresentato da a, *in due parti tali, che la maggiore abbia sulla minore un eccesso dato, rappresentato da* b.

Denotando tuttavia la parte minore con x,

La maggiore sarà espressa da $x+b$;

La loro somma, o il numero da dividersi, sarà equivalente ad $x+b+x$, ovvero a $2x+b$:

La condizione del problema darà dunque

$$2x+b=a.$$

Ora è manifesto che se bisogna aggiungere al doppio di x, o a $2x$, la quantità b, per fare la quantità a, ne risulta che bisogna diminuire a di b per ottenere $2x$, e che per conseguenza $2x=a-b$.

Da ciò si conchiuderà essere la metà di $2x$, ovvero $x=\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$

Quest' ultimo risultamento essendo tradotto in linguaggio ordinario mediante la sostituzione delle parole e delle frasi che sono indicate dalle lettere e dai segni che esso contiene, somministra la regola trovata qui sopra, secondo la quale, *per ottenere la minore delle parti cercate, si dee dalla metà del numero da dividersi, cioè da* $\frac{a}{2}$, *togliere la metà dell'eccesso dato, cioè* $\frac{b}{2}$.

Conoscendo la parte minore, si formerà la maggiore con aggiungere alla minore l' eccesso dato. Questa osservazione è sufficiente per finir di risolvere il problema proposto; ma

l' Algebra dà di più ; essa somministra una regola per calcolare la parte maggiore senza il soccorso della minore, ed ecco come : $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}$ essendo il valore di quest' ultima, aumentandolo dell' eccesso b, si avrà per la parte maggiore $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$;

ora $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$ esprime che, dopo aver tolta da $\frac{a}{2}$ la metà di b, bisogna aggiungere al resto il b tutto intero, ovvero due metà di b; il che importa aumentare $\frac{a}{2}$ d' una metà di b,

ovvero di $\frac{b}{2}$. Risulta da ciò che $\frac{a}{2}-\frac{b}{2}+b$ si riduce ad $\frac{a}{2}+\frac{b}{2}$; e traducendo quest' espressione in linguaggio ordinario, si scopre che *la maggiore delle due parti cercate è uguale alla metà del numero da dividersi aggiuntavi la metà del dato eccesso.*

Nel problema particolare, di cui mi sono occupato in primo luogo, il numero da dividersi era 9, e l'eccesso d' una parte sull' altra, 5; ora per risolverlo colle regole alle quali sono ultimamente pervenuto, bisognerà eseguire sui numeri 9 e 5 le operazioni indicate sopra a e b.

Intanto essendo $\frac{9}{2}$ la metà di 9, e $\frac{5}{2}$ quella di 5, per la parte minore si avrà

$$\frac{9}{2}-\frac{5}{2}=\frac{4}{2}=2,$$

e per la maggiore

$$\frac{9}{2}+\frac{5}{2}=\frac{14}{2}=7.$$

4. Ho chiamato x la minore delle due parti, e n'ho dedotto la maggiore; se si volesse cercare direttamente quest' ultima, si osserverebbe che rappresentandola con x, l'altra sarebbe $x-b$; poichè si passa dalla maggiore alla minore, togliendo l' eccesso della prima sulla seconda; il numero da dividersi sarebbe allora espresso da $x-b+x$, ovvero da $2x-b$, e si avrebbe per conseguenza

$$2x-b=a.$$

Questo risultamento fa vedere che $2x$ sorpassa la quantità a

della quantità b, e che in conseguenza $2x = a + b$. Prendendo la metà di $2x$ e della quantità che l' è uguale, onde avere il valore di x, si ottiene

$$x = \frac{a}{2} + \frac{b}{2},$$

il che dà, per calcolare la maggiore delle due parti cercate, la medesima regola scoperta qui sopra. Non mi tratterrò a dedurne l' espressione della minore.

La stessa relazione tra numeri dati e numeri incogniti può essere enunciata in più maniere differenti; quella che ha dato luogo al precedente problema, risulta ancora dall' enunciato seguente :

Conoscendo la somma a *di due numeri e la lor differenza* b, *trovare ciascuno di questi numeri ;* poichè, in altri termini, il numero da dividersi è la somma delle due parti cercate, e la lor differenza è l' eccesso della maggiore sulla minore. Ora se nelle regole trovate di sopra s' introduce il cangiamento avvenuto nei termini dell' enunciato, esse si muteranno in quest' altre.

Il minore dei due numeri cercati è eguale alla metà della loro somma, meno la metà della lor differenza ;

Il maggiore è eguale alla metà della loro somma, più la metà della lor differenza.

5. Ecco un problema analogo al precedente, ma un poco più complicato.

Dividere un numero dato in tre parti tali, che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato, e l' eccesso della maggiore sulla media sia un altro numero dato.

Per fissare le idee darò primieramente ai numeri cogniti valori individuati :

Supporrò che il numero da dividersi sia 230 ;

Che l'eccesso della parte media sulla minore sia 40,

Che l' eccesso della parte maggiore sulla media sia 60.

Indicando la parte minore con x,

La media sarà la minore più 40, ovvero $x + 40$,

E la maggiore sarà la media più 60, ovvero $x + 40 + 60$.

Ora le tre parti unite insieme debbono fare il numero da dividersi ; dunque

$$x + x + 40 + x + 40 + 60 = 230.$$

E riunendo da una parte i numeri dati, e dall' altra i numeri incogniti, x si troverà 3 volte nel risultamento ; dunque per compendio si scriverà

$$3x + 140 = 230.$$

Ma poichè bisogna aggiungere 140 al triplo di x per fare 230, s'inferisce che togliendo 140 da 230, si avrà precisamente il triplo di x, e che

$$3x = 230 - 140,$$

ovvero che

$$3x = 90;$$

e da ciò segue che $x = \frac{90}{3}$, cioè $= 30$.

Aggiungendo a 30 l'eccesso 40 della media sulla parte minore, si avrà 70 per la parte media.

Ed aggiungendo a 70 l'eccesso 60 della parte maggiore sulla media, si otterrà 130 per la parto maggiore.

6. Se i numeri cogniti fossero differenti da quelli da mo posti nell'enunciato, si risolverebbe pure il problema seguendo la via tracciata nel paragrafo precedente; ma uno sarebbe obbligato a ripetere tutti i ragionamenti e tutte le operazioni posti in uso per giungere al numero 30, poichè nulla fa vedere como questo numero si formi per mezzo dei numeri dati 230, 40 e 60. Per rendere la soluzione indipendente dai valori particolari dei numeri, e per far vedere ad un tempo come il valor dell'incognita si formi per mezzo delle quantità cognite, enuncierò il problema in questo modo:

Dividere un numero dato a *in tre parti tali, che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato* b, *e l'eccesso della maggiore sulla media sia un numero dato* c.

Chiamando, come sopra, x la quantità incognita, e scrivendo coll'aiuto dei segni convenuti e dei simboli a, b, c, che rappresentano le quantità cognite del problema, i ragionamenti fatti precedentemente sopra i numeri, si formerà di nuovo

la parte minore x,
la media $x + b$,
la maggiore $x + b + c$;

o la riunione di queste tre parti dovendo comporre il numero da dividersi, bisognerà che

$$x + x + b + x + b + c = a.$$

Questa espressione, per quanto sia semplice, può ancora abbreviarsi; poichè siccome essa fa vedere che x entra tre volte nel numero da dividersi, o che b v'entra due volte, così in vece di $x + x + x$ scriverò $3x$, ed in vece di $+ b + b$ l'espressione equivalente $2b$, e si otterrà

$$3x + 2b + c = a.$$

Questa ultima espressione fa conoscere che bisogna aggiungere al triplo del numero rappresentato da x il doppio del numero rappresentato da b, ed oltracciò il numero rappresentate da c, per formare il numero a; laonde, se dal numero a si toglie il doppio del numero b, e poi ancora il numero c, si avrà precisamente il triplo di x; dunque

$$3x = a - 2b - c:$$

ora essendo x il terzo di tre volte x, cioè di $3x$, si conchiuderà che

$$x = \frac{a - 2b - c}{3}.$$

Si osservi pertanto che non avendo assegnato alcun valore particolare ai numeri rappresentati da a, b, c, neppure il risultamento cui son giunto, dà alcun valore particolare per x; esso denota soltanto quali operazioni bisogna fare sopra questi numeri, allorchè si assegna loro un valore, per dedurne quello del numero incognito.

Infatti l'espressione $\frac{a - 2b - c}{3}$, alla quale x è uguale, può esser tradotta nel linguaggio ordinario, scrivendo in luogo delle lettere le denominazioni dei numeri cogniti da esse rappresentati, ed in vece dei segni l'enunciazione delle operazioni che essi indicano; si formerà così questa frase:

Dal numero da dividersi si tolga il doppio dell'eccesso della parte media sulla minore, ed inoltre l'eccesso della maggiore sulla media, e si prenda il terzo del resto.

Seguendo questa frase letteralmente, si determinerà la parte minore mediante le prime operazioni dell'Aritmetica. Il numero da dividersi sia, per esempio, 230, e gli eccessi 40 e 60, appunto come nel numero antecedente; per determinare la parte minore si toglierà da 230 due volte 40, cioè 80, e 60, e rimarrà 90, di cui il terzo, cioè 30, sarà la parte minore cercata, come di già si è trovato.

Che se il numero da dividersi fosse 520, e i due eccessi 50 e 120; si sottrarrebbe da 520 il doppio di 50, cioè 100, e 120; rimarrebbe così 300, il cui terzo, cioè 100, sarebbe la parte minore; si troverebbero le altre due parti aggiungendo 50 a 100, il che farebbe 150, e poi 120 a questo risultamento, il che darebbe 270; in tal modo le parti domandate sarebbero

100, 150, 270,

e la loro somma formerebbe 520, come richiede il problema.

Dunque, a parlar proprio, i risultamenti algebrici il più

delle volte non sono che indicazioni di operazioni da farsi sopra certi numeri per trovarne altri; ed appunto per questa ragione essi risultamenti in generale si chiamono *formole*.

Questo problema, benchè più complicato di quello del numero 1, può ancora essere risoluto col linguaggio ordinario; ciò rendesi manifesto dall'annessa Tavola, ove di fronte a ciascun ragionamento si è posta la sua traduzione in caratteri algebrici. L'esame attento di cotesto quadro non dee lasciare alcun dubbio sull'utilità dell'Algebra, e sulle circostanze della di lei invenzione.

PROBLEMA

Dividere un numero in tre parti in modo, che l'eccesso della media sulla minore sia un numero dato, e che l'eccesso della maggiore sulla media sia un altro numero dato.

SOLUZIONE

Col linguaggio ordinario.	*Con la scrittura algebrica.*
	Sia il numero da dividersi denotato da a, L'eccesso della parte media sulla minore da. . . . . b, L'eccesso della maggiore sulla media da . . . . c: La parte minore essendo. . . . . . x,
La parte media sarà la minore, più l'eccesso della media sulla minore;	La media sarà $x+b$,
La parte maggiore sarà la media, più l'eccesso della maggiore sulla media;	La maggiore $x+b+c$;
Le tre parti riunite insieme formano il numero proposto: Dunque la parte minore, più la parte minore, più l'eccesso della media sulla minore, più ancora la parte minore, più l'eccesso della media sulla minore, più l'eccesso della maggiore sulla media, eguagliano il numero da dividersi:	Dunque $x+x+b+x+b+c=a$,
Dunque tre volte la parte minore, più due volte l'eccesso della media sulla minore, più ancora l'eccesso della maggiore sulla media, eguagliano il numero da dividersi:	$3x+2b+c=a$,
Dunque tre volte la parte minore uguaglia il numero da dividersi, meno due volte l'eccesso della media sulla minore, e meno ancora l'eccesso della maggiore sulla media:	$3x=a-2b-c$,
Dunque finalmente la parte minore è uguale al terzo di ciò che resta dopo che si è tolto dal numero da dividersi due volte l'eccesso della media sulla minore, ed oltracciò l'eccesso della maggiore sulla media.	$x=\frac{a-2b-c}{3}$.

7. I segni convenuti nel numero 2 non sono i soli di cui l'Algebra si serve; nuove considerazioni introdurranno in seguito nuovi segni. Si è già dovuto osservare che per indicare nel numero 2 la moltiplicazione di x per 2, e nei numeri 5 e 6 quella di x per 3, e di b per 2, ho posto solamente queste cifre avanti le lettere x e b senz'alcuna interposizione di segno, e così farò d'ora innanzi; di maniera che ogni numero posto alla sinistra d'una lettera sarà moltiplicatore del numero da questa rappresentato: così le espressioni $5x$, $5a$, ec. indicheranno 5 volte x, cinque volte a, ec.; $\frac{3}{4}x$, o l'espressione equivalente $\frac{3x}{4}$, ec. indicheranno i $\frac{3}{4}$ di x, ovvero 3 volte x divise per 4, ec.

In generale la moltiplicazione si denoterà d'ora in poi ponendo i fattori di seguito gli uni agli altri senza alcuna frapposizione di segno, tutte le volte però che non sia per risultarne confusione.

Così le espressioni ax, bc, ec. saranno equivalenti ad $a \times x$, $b \times c$, ec.; ma non si potrà mai fare a meno del segno $\times$ allorchè si tratterà di numeri, perchè allora l'espressione 3×5, il cui valore è 15, divenendo 35 per l'ommissione del segno $\times$, cangerebbe interamente di significato. In questo caso si suole anche sostituire spesso un punto al segno $\times$, e si scrive $3 . 5$.

Delle Equazioni.

8. Esaminando attentamente la risoluzione dei problemi enunciati nei 3 e 6, si troverà composta di due parti ben distinte. Nella prima si esprimono col mezzo dei caratteri algebrici le relazioni che l'enunciato del problema stabilisce tra le quantità cognite e le quantità incognite; e ciò conduce ad eguagliare due quantità tra loro, cioè:

Nel numero 3, le quantità $2x + b$ ed a,

Nel numero 6, le quantità $3x + 2b + c$ ed a.

Poi da questa eguaglianza si deduce una serie di conseguenze, le quali menano finalmente ad uguagliare l'incognita x ad un aggregato di quantità date, connesse tra loro per mezzo di operazioni che si sanno eseguire: ecco la seconda parte della risoluzione.

Le due parti che ho indicate, si trovano in quasi tutti i problemi che sono del dominio dell'Algebra. È difficile dare, almeno per ora, una regola in virtù della quale si possa effettuare la prima parte, quella, cioè, che ha per oggetto la traduzione in caratteri algebrici delle condizioni della quistione.

Per riuscirvi, è mestieri familiarizzarsi colla scrittura algebrica, ed acquistare l'abitudine di decomporre l'enunciato di un problema in tutte le sue circostanze, sì esplicite, che implicite. Ma quando uno è pervenuto a formare i due numeri, che la quistione suppone uguali fra loro, potrà con andamenti metodici dedurre da questa espressione algebrica il valore dell'incognita, e ciò forma l'oggetto della seconda parte della risoluzione. Ma prima di far conoscere questi metodi, spiegherò il significato di alcune denominazioni usate dagli Algebristi a tal uopo.

Si chiama *equazione* l'uguaglianza di due quantità.

L'aggregato delle quantità che stanno da una medesima parte del segno $=$, si dice *membro*; ogni equazione ha due *membri*.

Quello che sta a sinistra si nomina il *primo membro*, l'altro è il *secondo*.

Nell'equazione $2x+b=a$, $2x+b$ è il *primo membro*, a è il *secondo membro*.

Le quantità che compongono un medesimo membro, allorchè vengono separate dai segni $+$ o $-$, si chiamano *termini*.

Così il primo membro dell'equazione $2x+b=a$ contiene due termini, e sono: $2x$ e $+b$.

L'equazione $\frac{3}{4}x+7=8x-12$ ha due termini in ciascun de' suoi membri, cioè:

$$\frac{3}{4}x \text{ e } +7 \text{ nel primo, } 8x \text{ e } -12, \text{ nel secondo.}$$

Quantunque abbia io preso a caso, e solo per servire d'esempio, l'equazione $\frac{3}{4}x+7=8x-12$, pure essa, al pari di tutte le altre di cui parlerò in appresso, dev'essere riguardata come proveniente da un problema, di cui si potrà sempre trovare un'enunciazione, traducendo in linguaggio ordinario l'equazione proposta. Quella di cui si tratta si riduce a

Trovare un numero x *tale, che aggiungendo* 7 *ai* $\frac{3}{4}$ *di* x, *la somma sia eguale ad* 8 *volte* x *meno* 12.

Parimente l'equazione $ax+bc-cx=ac-bx$ nella quale le lettere a, b, c, rappresentano quantità cognite, corrisponde alla quistione seguente:

Trovare un numero x *tale, che moltiplicandolo per un numero dato* a, *poi aggiungendovi il prodotto de' due numeri dati* b *e* c, *e togliendo da questa somma il prodotto del numero dato*

c *pel numero* x, *abbiasi un risultamento eguale al prodotto dei numeri* a *e* c *diminuito di quello dei numeri* b *e* x.

Coll'esercitarsi molto a passare dal linguaggio ordinario alla scrittura algebrica, ed a tradurre questa nel primo, si perverrà a familiarizzarsi coll'Algebra, la cui difficoltà non consiste in altro che nella perfetta intelligenza dei segni, e nell'uso dei medesimi.

Risolvere un'equazione significa ricavare da essa il valore dell'incognita, cioè ridurla ad un'altra equazione, in un membro della quale si trovi la sola incognita, e nell'altro le sole quantità cognite.

Le equazioni si sono divise in più classi o *gradi*, perchè i diversi problemi, che possono aversi a risolvere, conducono ad equazioni più o meno composte. Imprendo ad occuparmi primieramente delle *equazioni di primo grado*. Si chiamano con questo nome le equazioni nelle quali le incognite non sono moltiplicate nè per se stesse, nè fra di loro.

Della risoluzione delle equazioni di primo grado ad una sola incognita.

9. Si è già veduto che risolvere un'equazione vuol dire giungere ad una espressione nella quale l'incognita sola in un membro sia eguagliata a quantità cognite, combinate tra loro per mezzo di operazioni che si sappiano eseguire. Risulta da ciò che, per ridurre un'equazione a questo stato, è necessario *liberare* l'incognita dalle quantità cognite colle quali si trova combinata: ora l'incognita può trovarsi involta in tre modi diversi tra le quantità cognite:

1.° Per addizione e sottrazione, come nelle equazioni

$$x+5=9-x,$$
$$a+x=b-x;$$

2.° Per addizione, sottrazione e moltiplicazione, come nelle equazioni

$$7x-5=12+4x,$$
$$ax-b=cx+d;$$

3.° Finalmente per addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione, come nelle equazioni

$$\frac{5x}{3}+8=\frac{11}{12}x+9,$$

$$\frac{ax}{b}+cx-d=\frac{mx}{n}+\frac{p}{q}.$$

Si sviluppa l' incognita dalle addizioni e dalle sottrazioni, nelle quali essa entra colle quantità cognite, riunendo in un sol membro tutti i termini ove la medesima si trova; e per questo fine è necessario imparare come si trasporti un termine da un membro all' altro.

10. Per esempio, nell' equazione

$$7x - 5 = 12 + 4x$$

bisogna far passare il termine $4x$ dal secondo membro al primo, ed il termine -5 dal primo al secondo. A tale oggetto si osservi che cancellando $+4x$ nel secondo membro, si viene a diminuir questo della quantità $4x$, e che perciò bisogna operare la medesima sottrazione anche nel primo membro, a fine di conservar l'eguaglianza di questi due membri: si scriverà dunque $-4x$ nel primo membro, il quale diverrà $7x - 5 - 4x$; e così avrassi

$$7x - 5 - 4x = 12.$$

Cancellare -5 dal primo membro vuol dire sopprimere la sottrazione indicata di 5 unità; ed in conseguenza vuol dire aumentar questo membro di 5 unità; si dee dunque, per conservar l' eguaglianza, aumentar pure il secondo membro di 5 unità, ovvero scrivere $+5$ in questo membro: esso diverrà così $12+5$, e si otterrà

$$7x - 4x = 12 + 5.$$

Eseguendo le operazioni indicate, emergerà finalmente l'equazione

$$3x = 17.$$

Da questi ragionamenti, che possono applicarsi a qualunque esempio, si vede che cancellando in un membro un termine affetto dal segno $+$, il quale per conseguenza aumentava questo membro, bisogna sottrarre questo termine dall'altro membro, oppure scrivercelo col segno $-$; che al contrario, quando il termine che si cancella ha il segno $-$, siccome con la sua presenza diminuiva il membro in cui era, bisogna aumentar l' altro membro del medesimo termine, ovvero scriverlo in quest'ultimo col segno $+$. Si ricaverà da ciò questa regola generale:

Per far passare un termine qualunque di una equazione da un membro all' altro, bisogna cancellarlo nel membro ove si trova, e scriverlo nell' altro con un segno contrario a quello che prima aveva.

Per mettere questa regola in pratica, bisogna esservare che quando il primo termine di ciascuno membro non è preceduto da alcun segno, s' intende che abbia il segno $+$. Così passando il termine cx dell'equazione letterale $ax - b = cx + d$

dal secondo membro nel primo, si avrà

$$ax - b - cx = d;$$

passando in seguito il termine $-b$ dal primo membro nel secondo, verrà

$$ax - cx = d + b.$$

11. Per mezzo della regola precedente si possono primieramente riunire in uno dei membri tutti i termini affetti dall'incognita, e nell'altro tutte le quantità cognite; e sotto questa forma, il membro dove si trova l'incognita, può sempre scomporsi in due fattori, dei quali uno non contenga che quantità cognite, e l'altro la sola incognita.

Queste abbreviazioni si presentano da sè stesse tutte le volte che l'equazione proposta è numerica, e non contiene frazioni, perchè allora tutti i termini affetti dall'incognita si riducono ad un solo. Se si avesse, per esempio, $10x + 7x - 2x = 25 + 7$, eseguendo le operazioni indicate in ciascun membro, si troverebbe successivamente

$$17x - 2x = 32,$$
$$15x = 32;$$

e siccome $15x$ si scompone nei due fattori 15 e x, si avrebbe il fattore incognito x, dividendo pel fattore cognito 15 il numero 32, eguale al prodotto $15x$: e risulterebbe

$$x = \frac{32}{15}.$$

La scomposizione si fa alla stessa maniera nelle equazioni letterali della forma

$$ax = bc;$$

perchè il termine ax indica immediatamente il prodotto di a per x; se ne conchiude

$$x = \frac{bc}{a}.$$

Sia ora l'equazione

$$ax - bx + cx = ac - bc,$$

che contiene tre termini affetti dall'incognita. Poichè ax, bx, cx rappresentano i prodotti rispettivi di x per le quantità a, b, c, l'espressione $ax - bx + cx$ tradotta in linguaggio ordinario dà questa frase:

Da x, *preso prima tante volte quante unità sono in* a, *è stato tolto* x *tante volte quante unità sono in* b, *ed al risultamento è stata aggiunta la stessa quantità* x *tante volte quante unità sono in* c.

Segue da ciò, che in totalità l'incognita x si trova ripetuta tante volte, quante unità sono nella differenza dei numeri a e b, aumentata dal numero c, vale a dire tante volte quanto l'indica il numero $a-b+c$: i due fattori del primo membro sono per conseguenza $a-b+c$ ed x; si ha dunque

$$x=\frac{ac-bc}{a-b+c}.$$

Questo ragionamento, che può applicarsi a qualunque altro esempio, dimostra che *dopo la riunione in un sol membro dei diversi termini affetti dall' incognita, il fattore che moltiplica questa incognita, si forma di tutte le quantità che la moltiplicano isolatamente, riunite coi segni dai quali essè son precedute; e si ottiene poi l'incognita dividendo il membro tutto cognito pel fattore in quistione.*

In virtù di questa regola l'equazione $ax-3x=bc$ dà

$$x=\frac{bc}{a-3}.$$

Parimente l'equazione $x+ax=c-d$ conduce ad

$$x=\frac{c-d}{1+a},$$

perchè bisogna osservare che la lettera x essendo sola, dev'essere riguardata come moltiplica per l'unità. Si vede d'altronde che in $x+ax$ l'incognita si trova contenuta una volta di più che in ax, ed è per conseguenza moltiplicata per $1+a$.

12. È manifesto che se tutti i termini dell'equazione contenessero un fattore comune, si potrebbe togliere questo fattore senza turbar l'uguaglianza; poichè non si farebbe che dividere per un medesimo numero tutte le parti delle due quantità che si suppongono eguali tra loro.

Sia, per esempio, l'equazione

$$6abx-9bcd=12bdx+15abc.$$

Osservo primieramente che i numeri 6, 9, 12 e 15 sono divisibili per 3; e togliendo questo fattore, non farò che prendere il terzo di tutte le quantità che formano l'equazione; avrò, dietro questa riduzione,

$$2abx-3bcd=4bdx+5abc,$$

perciocchè se i tutti sono eguali, le loro terze parti sono anche uguali.

Osservo in seguito che la lettera b, combinata in ciascun termine per via di moltiplicazione, indica un fattore comune

a tutti questi termini; toglierò dunque anche questa, e verrà

$$2ax - 3cd = 4dx + 5ac.$$

Ed applicando a questa ultima equazione le regole dei numeri 10 e 11, ne dedurrò successivamente

$$2ax - 4dx = 5ac + 3cd,$$

$$x = \frac{5ac + 3cd}{2a - 4d}.$$

13. Passo ora alle equazioni nei cui termini si trovano divisori. Quante volte l'incognita non entra nei denominatori, potrebbero ad esso immediatamente applicarsi le regole precedenti; ma spesso torna più conto di ridurre tutti i termini allo stesso denominatore, il quale può ommettersi dopo.

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{2x}{3} + 4 = \frac{4x}{5} + 12 - \frac{5x}{7}.$$

Osserverò che l'Aritmetica somministra le regole per ridurre le frazioni al medesimo denominatore, e per convertire gl'interi in frazioni d'una specie data (*Aritm.* 79, 69), e trasformerò in virtù di queste regole in frazioni del medesimo denominatore tutti i termini dell'equazione proposta.

E cominciando primieramente dalle frazioni, che sono

$$\frac{2x}{3}, \quad \frac{4x}{5}, \quad \frac{5x}{7},$$

le cangerò, con la prima delle citate regole, in

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7}, \quad \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7}, \quad \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7};$$

poi per convertire gl'interi 4 e 12 in frazioni, altro non dovrà farsi che moltiplicarli pel denominatore comune delle frazioni, cioè, per $3 \times 5 \times 7$, e si avrà

$$3 \times 5 \times 7 \times 4, \qquad 3 \times 5 \times 7 \times 12.$$

Rimetttendo ora tutti questi termini nell'equazione proposta, essa diverrà

$$\frac{5 \times 7 \times 2x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 4}{3 \times 5 \times 7}$$

$$= \frac{3 \times 7 \times 4x}{3 \times 5 \times 7} + \frac{3 \times 5 \times 7 \times 12}{3 \times 5 \times 7} - \frac{3 \times 5 \times 5x}{3 \times 5 \times 7};$$

e si potrà mandar via dalla medesima il denominatore comune a tutti i suoi termini, perchè non si farà con questo che moltiplicare tutte le sue parti per esso denominatore (*Aritm.* 54), il che non turba l'uguaglianza. Tolto questo denominatore, verrà

$$5\times7\times2x+3\times5\times7\times4$$
$$=3\times7\times4x+3\times5\times7\times12-3\times5\times5x,$$

ovvero, eseguite le moltiplicazioni,

$$70x+420=84x+1260-75x,$$

equazione senza denominatori, dalla quale si ricaverà il valore di x colle regole precedenti.

L'esame del risultamento testè ottenuto, ed anche la sola applicazione delle citate regole d'Aritmetica, mostra ad evidenza che, per liberare un'equazione dalle frazioni, *conviene moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pel prodotto dei denominatori di tutte le altre, ed i termini interi pel prodotto di tutti i denominatori; e non tenere alcun conto del denominatore comune delle frazioni che ne risultano.*

L'equazione $70x+420=84x+1260-75x$ diviene successivamente

$$70x+75x-84x=1260-420,$$
$$61x=840,$$
$$x=\frac{840}{61}=13\frac{47}{61}.$$

Nella stessa guisa si eliminano le frazioni dalle equazioni letterali, osservando solo che allora non si possono che accennare le moltiplicazioni, le quali si eseguono quando si tratta di numeri.

Sia, per esempio, l'equazione

$$\frac{ax}{b}-c=\frac{dx}{e}+\frac{fg}{h};$$

se ne ricaverà

$$eh\times ax-beh\times c=bh\times dx+be\times fg,$$

risultamento che può essere scritto con maggiore semplicità, ponendo, giusta la convenzione stabilita nel numero 7, di seguito gli uni agli altri, senza interposizione di segno, i fattori di ciascun prodotto, e invertendo l'ordine delle moltiplicazioni per conservare l'ordine alfabetico, che facilita la pronunzia delle lettere: così verrà

$$aehx-bceh=bdhx+befg,$$

da cui si conchiuderà

$$achx - bdhx = befg + bceh\,,$$

$$x = \frac{befg + bceh}{ach - bdh}\,.$$

14. Quantunque non possa assegnarsi alcuna regola generale e precisa per formare l'equazione relativa ad un problema qualunque, esiste tuttavia un precetto, la cui bene intesa applicazione non mancherà di condurre al fine proposto. Eccolo questo precetto:

Indicare col mezzo dei simboli algebrici sulle quantità cognite, rappresentate sia da numeri, sia da lettere, e sulle quantità incognite rappresentate sempre da lettere, i medesimi ragionamenti e le medesime operazioni che bisognerebbe eseguire per verificare i valori delle incognite, se le medesime fossero note.

Per porro in pratica questa regola, bisogna dapprima determinare con ogni diligenza quali sono le operazioni che l'enunciato della quistione contiene, sia esplicitamente, sia implicitamente; ma in ciò appunto è riposta tutta la difficoltà di *mettere in equazione* un problema proposto.

Ecco intanto alcuni esempi per mostrare l'applicazione del precetto dettato qui sopra. Ho scelto i due primi fra le quistioni risolute in Aritmetica, ad oggetto di porre sott'occhio la facilità che la scrittura algebrica arreca allo sviluppo degli enunciati.

1.° *V'abbiano due fontane, delle quali la prima versando sola, riempia una certa vasca in ore* $2\frac{1}{2}$, *e la seconda riempia la stessa vasca, versando anche sola, nello spazio di ore* $3\frac{1}{4}$; *quanto tempo sarà egli necessario perchè la stessa vasca sia ripiena dalle due fontane versanti simultaneamente?*

Se il tempo che si cerca, si conoscesse, è chiaro che verrebbe sottoposto alla pruova in questo modo: si calcolerebbero, cioè, le quantità d'acqua versate in particolare da ciascuna fontana, e fattane la somma, si confronterebbe questa colla totalità dell'acqua che la vasca può contenere; e le due quantità paragonate dovrebbero trovarsi uguali.

Per formare adunque l'equazione del problema si denoterà con x il tempo incognito, e s'indicheranno sopra x le operazioni nominate qui sopra; ma a fine di rendere la soluzione indipendente da numeri individuati, ed anche per abbreviare l'espressione di quelli dell'enunciato che sono frazionari, si rappresenteranno eziandio questi con lettere; e però si scriverà a in luogo di ore $2\frac{1}{2}$, e b in vece di ore $3\frac{3}{4}$.

Ciò posto, assumendo, come in Aritmetica, la capacità della vasca per unità, si vedrà che

La prima fontana, la quale riempie da sè sola la vasca in un numero a d'ore, vi versa in un' ora una quantità d'acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{a}$; e che per conseguenza essa fornirà in un numero x d'ore una quantità d'acqua rappresentata da $x \times \frac{1}{a}$, o sia da $\frac{x}{a}$ (*Aritm.* 53).

La seconda fontana, che sola riempie la medesima vasca in b ore, vi versa in un'ora una quantità d'acqua espressa dalla frazione $\frac{1}{b}$; e per conseguenza in un numero x d'ore ve ne verserà la quantità $x \times \frac{1}{b}$, ovvero $\frac{x}{b}$.

La quantità totale dell'acqua somministrata dalle due fontane versanti insieme nello stesso tempo sarà dunque

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b};$$

e siccome questo volume d'acqua deve uguagliare quello che la vasca può contenere, e ch'è stato preso per unità, si avrà finalmente l'equazione

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1.$$

Questa equazione, trattata con le regole precedenti, conduce a

$$bx + ax = ab,$$

$$x = \frac{ab}{b+a}.$$

Dall'ultima formola si cava la seguente semplicissima regola, per risolvere il problema proposto in tutti i casi particolari:

Si divida il prodotto dei numeri che esprimono il tempo che impiega ciascuna fontana in particolare a riempiere la vasca, per la somma di questi numeri; il quoziente esprimerà il tempo che bisognerà alle due fontane per riempirla simultaneamente.

Applicando questa regola ai numeri dell'enunciato, si ha

$$2\frac{1}{2} \times 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} \times \frac{15}{4} = \frac{75}{8},$$

$$2\frac{1}{2} + 3\frac{3}{4} = \frac{5}{2} + \frac{15}{4} = \frac{20}{8} + \frac{30}{8} = \frac{50}{8},$$

e quindi

$$x = \frac{75}{50} = \frac{3}{2}.$$

2.° *Sia a un numero da dividersi in tre parti, che abbiano tra loro i medesimi rapporti dei numeri dati* m , n *e* p.

È manifesto che la verificazione del problema si farebbe nel modo seguente :

Denotando con x la 1.ª parte , si avrebbe

$$m : n :: x : \text{alla 2.}^a \text{ parte} = \frac{nx}{m} \text{ (*Artim.* 116),}$$

$$m : p :: x : \text{alla 3.}^a \text{ parte} = \frac{px}{m} ;$$

e sommando le tre parti, dovrebbe trovarsi il numero da dividersi : si avrà dunque l'equazione

$$x + \frac{nx}{m} + \frac{px}{m} = a.$$

Riducendo tutti i suoi termini al denominatore m, essa diverrà

$$mx + nx + px = am,$$

e da quest' ultima equazione si caverà

$$x = \frac{am}{m+n+p}.$$

Questo risultamento non è che la traduzione algebrica della *regola di società* (*Aritm.* 124) ; perciocchè, riguardando i numeri m , n , p come esprimenti i capitali dei mercanti , $m+n+p$ è il capitale totale, a il guadagno da dividersi , e l' espressione

$$x = \frac{ma}{m+n+p}$$

dice che *una parte si ottiene moltiplicando il capitale corrispondente pel guadagno totale , e dividendo il prodotto per la somma dei capitali,* il che si riduce alla proporzione

il capitale totale : un capitale parziale

:: il guadagno totale : guadagno parziale corrispondente.

15. La formazione dell' equazione del problema seguente richiede alcune speciali avvertenze, che non si sono ancora presentate.

Un pescatore, per incoraggiare suo figlio, gli promette 5 centesimi per ogni tiro di rete in cui questi avrà preso del pesce, ma esso pure restituirà a suo padre 3 centesimi per ogni tiro infruttuoso. Dopo 12 tiri di rete il padre ed il figlio fanno il loro conto, e ne risulta che il primo deve al secondo 28 centesimi. Quanti sono stati i tiri di rete felici?

Se si rappresenta il numero di questi tiri con x, il numero dei tiri infruttuosi sarà $12 - x$; e se questi numeri fossero noti, si verificherebbero moltiplicando 5 centesimi pel primo, onde ottenere ciò che il padre deve dare al figlio, e 3 centesimi pel secondo, a fin di avere ciò che il figlio deve restituire al padre: il primo numero dovrebbe superare il secondo dei 28 centesimi che il padre deve a suo figlio.

Pel primo numero si avrà x volte 5 centesimi, ovvero $5x$. In quanto al secondo numero si presenta una difficoltà: come ottenere il prodotto di 3 per $12 - x$? Se in vece di x vi fosse un numero individuato, si effettuerebbe prima la sottrazione indicata, e poi si moltiplicherebbe 3 pel resto; ma per lo momento la cosa non è possibile, e bisogna procurare di eseguire la moltiplicazione prima della sottrazione, e almeno di ridurre il risultamento ad un aggregato di termini algebrici simili a quelli che si trovano nelle equazioni che si sanno risolvere.

Con un poco d'attenzione si vede che, prendendo 12 volte il numero 3, si ripete il 3 tante volte di più quante sono le unità che contiene il numero x, del quale si dovea prima diminuire il moltiplicatore 12, di maniera che il vero prodotto sarà

36 diminuito di 3 preso x volte o di $3x$,

cioè sarà

$$36 - 3x.$$

Questa conchiusione può verificarsi facilmente dando ad x valori numerici. Se, per esempio, x fosse uguale ad 8, allora il numero 3 dovrebbe prendersi 12 volte — 8 volte; ed è chiaro che se si trascurasse — 8 volte, si porrebbe nel risultamento 8 volte di più il numero 3: il vero prodotto sarà dunque

$$3 \times 12 - 3 \times 8 = 36 - 24 = 12.$$

Tale risultamento si accorda con quello che si otterrebbe togliendo prima 8 da 12; perchè

$$12 - 8 = 4 \quad \text{e} \quad 3 \times 4 = 12.$$

Ciò posto, poichè il danaro dovuto dal padre al figlio è espresso da $5x$, e da $36 - 3x$ quello che il figlio deve a suo padre, bisogna che il secondo numero tolto dal primo dia per resto 28; ma qui ancora nasce una nuova difficoltà: co-

me togliere $36 - 3x$ da $5x$, senza aver prima sottratto $3x$ da 36?

Si scansa questa difficoltà osservando che se si trascurasse il termine $-3x$, e si togliesse da $5x$ il numero 36 tutto intero, si toglierebbe necessariamente $3x$ di più, imperocchè non dee togliersi già 36 da $5x$, ma 36 prima diminuito di $3x$. E però la differenza $5x - 36$ dev'essere aumentata di $3x$ per formare la quantità che dee restare dopo che si è tolto da $5x$ il numero espresso da $36 - 3x$: questa quantità sarà dunque

$$5x - 36 + 3x;$$

e si avrà l' equazione

$$5x - 36 + 3x = 28,$$

che successivamente si riduce ad

$$8x - 36 = 28,$$

$$8x = 28 + 36,$$

$$8x = 64,$$

$$x = \frac{64}{8} = 8.$$

Sono dunque stati 8 i tiri di rete felici, e 4 per conseguenza gl' infruttuosi.

In fatti 8 tiri a 5 centesimi l'uno danno 40 cent.
4 tiri a 3 danno 12

differenza 28,

come l' enunciato del problema esigeva.

Se la soluzione si volesse rendere generale, si rappresenterebbe con a la somma che il padre dà a suo figlio per ciascun tiro felice di rete, con b quella che il figlio rende a suo padre per ciascun tiro di rete infruttuoso, con c il numero totale dei tiri di rete, e con d ciò che il padre deve a suo figlio dopo questo numero di tiri. E chiamando sempre x il numero dei tiri felici, $c - x$ sarebbe quello dei tiri infruttuosi; intanto ciascun tiro della prima specie producendo al figlio una somma a, x tiri gli produrrebbero $a \times x$, ovvero ax, ed i tiri infruttuosi produrrebbero al padre la somma b moltiplicata pel numero $c - x$.

Il ragionamento col quale si sono trovate tutte le parti di cui si compone il prodotto di 3 per $12 - x$, si applica egualmente al caso generale. Se si trascura primieramente $-x$ per formare il prodotto bc di b per c tutto intero, la quantità b sarà ripetuta x volte di più, e per conseguenza il vero prodotto sarà $bc - bx$.

Per sottrarre questo prodotto dalla quantità ax, bisogna

osservare ancora, come nell'esempio numerico, che se si togliesse la quantità bc tutta intera, verrebbesi a togliere di più la quantità bx, di cui la prima doveva essere anteriormente diminuita; e per conseguenza il vero resto non è già $ax - bc$, ma bensì $ax - bc + bx$.

Un tal resto frattanto dovendo essere uguale a d, l'equazione del problema sarà

$$ax - bc + bx = d,$$

e darà

$$ax + bx = d + bc,$$

$$x = \frac{d + bc}{a + b}.$$

Questa formula generale indicando le operazioni da farsi sui numeri dati a, b, c, d, per ottenere l'incognita x, può, o esser tradotta in regola, o essa stessa immediatamente servire nei singoli casi alla determinazione del valore dell'incognita, scrivendovi in vece delle lettere a, b, c, d i numeri dati; l'ultimo modo è ciò che si dice *sostituire i valori dei dati*, ovvero *mettere la formola in numeri*. Applicandovi quelli del problema risoluto di sopra, verrà

$$x = \frac{28 + 3 \times 12}{5 + 3};$$

ed eseguendo le operazioni indicate, si ha, come allora,

$$x = \frac{28 + 36}{8} = \frac{64}{8} = 8.$$

Metodi per eseguire, per quanto la cosa il comporti, le operazioni indicate sulle quantità rappresentate da lettere.

16. Il problema precedente ha fatto vedere che in taluni casi bisogna risolvere in moltiplicazioni parziali una moltiplicazione indicata sulla somma o sulla differenza di più quantità; e nel numero 11 si è praticato precisamente il contrario allorchè la quantità $ax - bx + cx$, che rappresenta il risultamento di più moltiplicazioni seguite da addizioni e da sottrazioni si è scomposta nei due fattori $a - b + c$ ed x, i quali non dinotano che una sola moltiplicazione preceduta da addizione e da sottrazione. I ragionamenti di cui si è fatto uso in queste due circostanze, possono essere ridotti a regole; e ne risulteranno, rispetto alle quantità rappresentate da lettere, due operazioni, che si sono chiamate *moltiplicazione* e *divisione algebriche*, attesa l'analogia ch'esse hanno con le operazioni dell'Aritmetica le quali portano i medesimi nomi.

La medesima analogia ha fatto nascere l'idea di due operazioni algebriche che portano il nome *di addizione* e di *sottrazione*, nelle quali si ha per oggetto di riunire più espressioni algebriche in una sola, o di toglierle l'una dall'altra; ma queste operazioni, al pari delle precedenti, differiscono da quelle dell'Aritmetica in questo, che i loro risultamenti, non essendo il più delle volte che indicazioni di operazioni da eseguirsi, non presentano che una trasformazione delle operazioni indicate in origine, in altre che producono il medesimo effetto. Accade soltanto, o che le espressioni diventano più semplici, o che si dà loro una forma atta a manifestare le condizioni che bisogna adempire.

A fine di spiegare queste operazioni, si sono chiamate quantità *monomie* o semplicemente *monomî*, quelle che non hanno che un sol termine, come a dire $+2a$, $-3ab$, *ec.*; quantità *binomie* o *binomî*, quelle che ne hanno due, come $a+b$, $a-b$, $5a-2x$, ec.; quantità *trinomie* o *trinomî*, quelle che ne han tre; *quadrinomie* o *quadrinomî*, quelle che ne hanno quattro, ed in generale quantità *polinomie* o semplicemente *polinomî*, le quantità composte di più termini. Del resto giova sapere che i monomî si sogliono anche chiamare quantità *incomplesse*, ed i polinomî quantità *complesse*.

Dell' addizione delle quantità algebriche.

17. L'addizione delle quantità monomie si fa unendole col segno $+$; così l'espressione $a+b$ indica la somma delle due quantità rappresentate da a e da b. Ma quando si propone di sommare insieme le espressioni algebriche, si ha nello stesso tempo in mira di rendere più semplice il risultamento, riducendolo al minor numero possibile di termini colla riunione di più di essi in un solo, almeno tutte le volte che la cosa è possibile.

Questa riunione è quella ch'è stata eseguita nei numeri 2 e 5, nel primo dei quali la quantità $x+x$ è stata ridotta a $2x$, e nell' altro la quantità $x+x+x$ a $3x$. Essa non può aver luogo che riguardo alle quantità espresse dalle medesime lettere, e che si chiamano per questa ragione quantità *simili*. Si riguarda allora la quantità letterale como un' unità che si trova ripetuta un certo numero di volte; così le quantità $2a$ e $3a$, considerate come due e tre unità d'una specie particolare, formano con la loro somma $5a$, ovvero 5 unità della medesima specie. Parimente $4ab$ e $5ab$ formano $9ab$.

In questo caso la somma si fa cadere sopra le cifre che precedono la quantità letterale, e che indicano quante volte essa è ripetuta. Queste cifre si chiamano *coefficienti*. Il coefficiente è dunque il moltiplicatore della quantità innanzi alla quale è

posto; e bisogna rammentarsi che quando esso non è scritto, è uguale all'unità, perchè $1a$ è la stessa cosa che a.

18. Allorchè si tratta di sommare quantità qualunque, come

$$4a + 5b \quad \text{e} \quad 2c + 3d,$$

il tutto dev' essere evidentemente composto da tutte le parti unite insieme; bisogna dunque scrivere

$$4a + 5b + 2c + 3d.$$

Se al contrario si avessero a sommare le quantità

$$4a + 5b \quad \text{e} \quad 2c - 3d,$$

bisognerebbe, nella loro somma, scrivere col segno —, o indicare come sottrattiva, la quantità $3d$, la quale dovendo essere tolta da $2c$, diminuirebbe necessariamente di altrettanto la somma che formerebbesi riunendo $2c$ con la prima delle quantità proposte; e si avrebbe

$$4a + 5b + 2c - 3d.$$

Questi due esempi fanno manifesto che *la somma algebrica dei polinomi si esegue scrivendo di seguito le une alle altre coi loro segni le quantità da sommarsi, e osservando che i termini che non sono preceduti da alcun segno, si debbono supporre affetti dal segno* +.

L'operazione fatta qui sopra non è, a parlar propriamente, che un'indicazione, mediante la quale la somma di due quantità complesse è stata ridotta alla somma e alla sottrazione d'un certo numero di quantità monomie; ma se le espressioni da sommarsi contenessero termini simili, si potrebbero riunire questi termini operando immediatamente sui loro coefficienti.

Siano, per esempio, le espressioni

$$4a + 9b - 2c,$$
$$2a - 3c + 4d,$$
$$7b + c - e;$$

la somma semplicemente indicata, dietro la regola precedente, sarà

$$4a + 9b - 2c + 2a - 3c + 4d + 7b + c - e.$$

Ma i termini $4a$ e $+ 2a$ essendo formati di quantità simili, si riducono ad un solo eguale a $6a$.

Parimente i termini $+ 9b$, $+ 7b$ danno $16b$.

I termini $- 2c$ e $- 3c$, ambedue sottrattivi, producono nel totale il medesimo effetto che la sottrazione d'una quantità eguale alla loro somma, cioè, il medesimo effetto che la sottrazione di $5c$; e siccome, a cagione del termine $+ c$, si deve da un'altra parte aggiungere c, resterà solamente da sottrarre $4c$.

La somma delle espressioni proposte sarà dunque ridotta a

$$6a + 16b - 4c + 4d - e.$$

19. L'ultima operazione praticata qui sopra, per mezzo della quale si riuniscono tutti i termini simili in un solo, qualunque segno essi abbiano, chiamasi *riduzione o contrazione dei termini simili. Essa si esegue facendo la somma delle quantità simili affette dal segno +, quella delle quantità simili affette dal segno —; poi togliendo la più piccola di queste due somme dalla più grande, e dando al resto il segno della maggiore.*

È da osservare che la riduzione si applica a tutte le operazioni algebriche.

Ecco, per esercitare il lettore, alcuni esempi di somme coi loro risultamenti

1.° Sommare le quantità

$$\begin{array}{l} 7m + 3n - 14p + 17r \\ 3a + 9n - 11m + 2r \\ 5p - 4m + 8n \\ 11n - 2b - m - r + s. \end{array}$$

risultamento $7m + 3n - 14p + 17r + 3a + 9n - 11m + 2r + 5p - 4m + 8n + 11n - 2b - m - r + s.$

Facendo la riduzione, questa quantità si cangia nella seguente

$$-9m + 31n - 9p + 18r + 3a - 2b + s,$$

ovvero $31n - 9m - 9p + 18r + 3a - 2b + s,$

cominciando da un termine che abbia il segno +.

2.° Sommare le quantità

$$\begin{array}{l} 11bc + 4ad - 8ac + 5cd \\ 8ac + 7bc - 2ad + 4mn \\ 2cd - 3ab + 5ac + an \\ 9an - 2bc - 2ad + 5cd. \end{array}$$

risultamento $11bc + 4ad - 8ac + 5cd + 8ac + 7bc - 2ad + 4mn + 2cd - 3ab + 5ac + an + 9an - 2bc - 2ad + 5cd.$

E riducendo questa quantità, essa diviene

$$16bc + 5ac + 12cd + 4mn - 3ab + 10an.$$

Della sottrazione delle quantità algebriche.

20. La sottrazione dei monomi s'indica, come si è convenuto, ponendo il segno — tra la quantità da sottrarsi e quella

da cui si sottrae: così

b sottratto da a si denota con $a - b$.

Allorchè le quantità sono simili, la sottrazione si esegue immediatamente sopra i loro coefficienti.

Se da $5a$ si toglie $3a$, si ha per resto $2a$.

Relativamente alla sottrazione dei polinomi bisogna distinguere due casi. 1.° Se la quantità da sottrarsi ha tutti i suoi termini affetti dal segno $+$, bisogna evidentemente dar loro il segno $-$, poichè si debbono togliere successivamente tutte le parti della quantità da sottrarsi.

Se, per esempio, da $5a - 9b + 2c$ si vuol togliere $2d + 3e + 4f$, bisogna scrivere

$$5a - 9b + 2c - 2d - 3e - 4f.$$

2.° Se la quantità da sottrarsi ha termini affetti dal segno $-$, bisogna dare a questi termini il segno $+$. In fatti se dalla quantità a si volesse togliere $b - c$, e si scrivesse $a - b$, si sarebbe così diminuita a dell'intera quantità b; ma la sottrazione non dovea effettuarsi che dopo aver diminuito b della quantità c: si è dunque tolto di più tanto, quanto è questa ultima quantità, che bisogna per conseguenza restituire col segno $+$, il che darà pel vero risultamento

$$a - b + c.$$

Questo ragionamento, che si può applicare a tutti i casi consimili, fa vedere che il segno $-$ di c ha dovuto esser cangiato in $+$; e considerando ad un tempo questo risultamento ed il precedente, si conchiuderà che *la sottrazione delle quantità algebriche si effettua scrivendo di seguito alla quantità da cui se ne vuol sottrarre un' altra, quest' ultima, dopo aver cangiati in essa i segni $+$ in $-$, e i segni $-$ in $+$.*

Quando si è scritto il risultamento dato immediatamente dalla regola enunciata qui sopra, si faranno, se vi avranno luogo, le riduzioni conformi al precetto del numero 19, come si vedrà negli esempi seguenti.

1.° Sottrarre da $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$
la quantità. . . . $51a - 27b + 11c - 4d$.

Risultamento. . $17a + 2m - 9b - 4c + 23d$
$- 51a + 27b - 11c + 4d$.

E facendo la riduzione, questa quantità diviene

$$-34a + 2m + 18b - 15c + 27d,$$

o meglio

$$2m - 34a + 18b - 15c + 27d.$$

2.° Sottrarre da $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
la quantità . . . . . $8am - 2ab + 11ac - 7cd$.

Risultamento. . $5ac - 8ab + 9bc - 4am$
$- 8am + 2ab - 11ac + 7cd$.

Effettuando la riduzione, si ottiene

$$- 6ac - 6ab + 9bc - 12am + 7cd,$$

o pure $9bc - 6ac - 6ab - 12am + 7cd$.

Della moltiplicazione delle quantità algebriche.

21. Fino a che nelle lettere non si ravvisano che i valori numerici delle quantità da esse rappresentate, altra idea non dee aversi della moltiplicazione algebrica che quella della moltiplicazione aritmetica (*Aritm.* 21, 74). Così *moltiplicare* a *per* b *significa comporre con la quantità rappresentata da* a *un' altra quantità, nel modo stesso che la quantità rappresentata da* b *è stata formata con l' unità.*

Si sono di già fatti conoscere nei numeri 2 e 7 i segni dei quali si è convenuto far uso per indicare la moltiplicazione; ed il prodotto di a per b si denoterà in conseguenza tanto con $a \times b$, quanto con $a . b$, o finalmente con ab.

Si ha molto spesso bisogno d' indicare più moltiplicazioni successive, come quella di a per b, poi del prodotto ab per c, quindi di quest' ultimo prodotto per d, e così di seguito. In tal caso è manifesto che l' ultimo risultamento è un numero che ha per *fattori* i numeri a, b, c, d (*Aritm.* 22); e generalizzando l' ultima delle convenzioni rammentate qui sopra, *questo prodotto si denota scrivendo di seguito gli uni agli altri, e senza alcuna interposizione di segno, i fattori dai quali esso è formato:* avrassi in tal guisa l' espressione $abcd$.

Reciprocamente, qualunque espressione, come questa $abcd$, formata da più lettere scritte immediatamente le une appresso alle altre, esprime sempre il prodotto dei numeri rappresentati da queste lettere.

Ho di già fatto tacitamente uso di queste convenzioni, nelle quali i coefficienti numerici sono pure compresi, poichè essi sono manifestamente fattori della quantità proposta. In effetti l' espressione $15abcd$, indicando che la quantità $abcd$ è presa 15 volte, indicherà ancora il prodotto dei cinque fattori 15, a, b, c, d.

22. Segue da ciò, che per indicare la moltiplicazione di più monomi, come di $4abc$, $5def$, $3mn$, bisogna scrivere queste

quantità di seguito le une alle altre, senza interposizione di segno, e verrà

$$4abc5def3mn;$$

ma si è dimostrato nell'Aritmetica, numero 70, potersi invertire ad arbitrio l'ordine dei fattori d'un prodotto, salvo il valore di questo; si profitterà dunque di tal circostanza, e si ravvicineranno i fattori numerici, la cui moltiplicazione può eseguirsi colle regole dell'Aritmetica: si concepirà perciò il prodotto in quistione come indicato nell'ordine $4.5.3abcdefmn$; e facendo in atto la moltiplicazione dei numeri 4, 5, 3, si avrà in miglior forma

$$60abcdefmn \ (^*).$$

23. L'espressione di un prodotto si abbrevia di molto, quando esso contiene fattori eguali. In vece di scrivere più volte di seguito la lettera che rappresenta uno di questi fattori, non si scrive che una sola volta, e *si denota con un numero quante volte essa avrebbe dovuto scriversi come fattore*; ma perchè questo numero indica moltiplicazioni successive, è necessario distinguerlo accuratamente dal coefficiente, il quale non indica che una somma di quantità eguali: ecco perchè si pone un tal numero alla destra della lettera, ed un poco al di sopra, mentre il coefficiente è sempre scritto a sinistra della lettera e sulla medesima linea.

Dietro queste convenzioni il prodotto di a per a, che sarebbe indicato, secondo il numero 21, da aa, diviene a^2. Il 2 superiore denota che il numero rappresentato dalla lettera a entra due volte come fattore nell'espressione proposta, la quale per conseguenza non dee confondersi con $2a$, che non è altro che il compendio di $a+a$. Per ben comprendere l'errore che si commetterebbe prendendo l'una espressione per l'altra, basta sostituire numeri alle lettere. Se si avesse, per esempio, $a=5$, $2a$ diverrebbe $2.5=10$, e $a^2=a\times a=5.5=25$.

Continuando questo sistema, si vedrà che per denotare un prodotto in cui a entra tre volte come fattore, bisognerà scrivere a^3 in vece di aaa; parimente a^5 esprime un prodotto nel quale a è cinque volte fattore, cioè un prodotto equivalente ad $aaaaa$.

(*) L'uso dei simboli algebrici accorciando di molto la dimostrazione di questa proposizione, ho creduto doverla qui rifare per mezzo di questi simboli.

Se si scrive il prodotto $abcdef$ come segue: $abc\times ed\times f$, e si scambia l'ordine dei due fattori del prodotto de per avere ed (*Aritm.* 27), verrà $abc\times ed\times f$, ovvero $abcedf$. È evidente che si potrà con nuove decomposizioni indurre quel cangiamento che si vorrà nell'ordine dei fattori del prodotto proposto.

24. I prodotti formati in tal guisa, cioè da moltiplicazioni successive di una stessa quantità, si chiamano in generale *potenze* di questa quantità.

La quantità stessa, cioè a, si chiama la prima potenza.

La quantità moltiplicata per se stessa, cioè aa, ovvero a^2, è la seconda potenza, che chiamasi ancora il *quadrato*.

La quantità moltiplicata due volte di seguito per se stessa, ovvero aaa, o pure a^3, è la terza potenza, che chiamasi anche *cubo* (*).

In generale una potenza qualunque prende il suo nome dal numero dei fattori eguali, dai quali essa è formata: così a^5, o sia $aaaaa$, è la *quinta* potenza di a.

Per mostrare l' applicazione di queste denominazioni, prenderò il numero 3, ed avrò per le sue diverse potenze:

1.ª potenza 3
2.ª . . . . $3 . 3 = 9$
3.ª . . . . $3 . 3 . 3 = 9 . 3 = 27$
4.ª . . . . $3 . 3 . 3 . 3 = 27 . 3 = 81$
5.ª . . . . . $3 . 3 . 3 . 3 . 3 = 81 . 3 = 243$
etc.

Il numero che denota la potenza di un altro numero, si chiama *esponente* di questo.

Così nelle espressioni a^6, b^3, ec. i numeri 6 e 3 sono gli esponenti di a e di b; il primo denota la sesta potenza di a, il secondo, la potenza terza o il cubo di b.

L' esponente per brevità non si scrive, quando è uguale all' unità: a è la stessa cosa che a^1. Pertanto ogni lettera senza esponente s' intenda che abbia per esponente 1.

Risulta evidentemente da ciò che precede, che *per formare una potenza d' un numero, bisogna moltiplicare questo numero tante volte in sè stesso, quante n' esprime l' esponente della potenza diminuito dell' unità.*

25. Poichè l' esponente denota il numero dei fattori eguali che compongono l' espressione di cui esso fa parte; e poichè il prodotto di due quantità deve avere per fattori tutti quelli che formano ciascuna di queste quantità; se ne deduce che l' espressione a^5, nella quale a è 5 volte fattore, moltiplicata per l' espressione a^3, in cui a è 3 volte fattore, deve dare un prodotto, nel quale a sia 8 volte fattore, ed espresso in conseguenza da a^8; e che in generale *il prodotto di due potenze della medesima quantità debba essere quella potenza della stessa quantità, che ha per esponente la somma degli esponenti del moltiplicando e del moltiplicatore.*

(*) Le denominazioni di *quadrato* e di *cubo* dipendendo da considerazioni geometriche, e rompendo l' uniformità della nomenclatura dei prodotti formati da fattori eguali, sono impropriissime in Algebra; ma si adoprano frequentemente a cagione della loro brevità.

26. Segue da ciò, che *quando due monomi hanno lettere comuni, l'espressione del prodotto di tali quantità può essere abbreviata, sommando gli esponenti delle lettere simili del moltiplicando, e del moltiplicatore.*

Per esempio, l'espressione del prodotto delle quantità a^2b^3c e $a^4b^5c^2d$, che secondo la convenzione del numero 21, sarebbe $a^2b^3ca^4b^5c^2d$, si rende più semplice mettendo insieme i fattori rappresentati dalla medesima lettera, il che dà

$$a^2a^4b^3b^5cc^2d,$$

e da ciò si conchiude

$$a^6b^8c^3d,$$

scrivendo

a^6 in luogo di a^2a^4

b^8 in luogo di b^3b^5

c^3 in luogo di cc^2, cioè di c^1c^2.

27. Come le potenze si distinguono pel numero dei fattori uguali da cui vengono formate, così i prodotti qualunque si classificano dal numero dei fattori semplici o *primi* che li compongono; ed io darò a queste classi il nome di *gradi*. Il prodotto a^2b^3c, a cagion d'esempio, sarà del sesto grado, perchè inchiude 6 fattori semplici, cioè: 2 fattori a, 3 fattori b ed 1 fattore c. È evidente che i fattori a, b, c, riguardati qui come numeri primi, non sono tali che rispetto all'Algebra, la quale non permette di decomporli; ma essi possono per altro rappresentare numeri composti: qui non trattasi che del loro stato generale (*).

Si osservi che nel valutare il grado delle quantità algebriche, non dee tenersi alcun conto dei coefficienti espressi in numeri; non sono da considerarsi che le sole lettere: così l'espressione $18a^2b$ è di terzo grado.

Intanto è manifesto (21, 25) che quando si moltiplicano due monomi l'uno per l'altro, il numero che denota il grado del prodotto, è la somma di quelli che denotano il grado di ciascuno di tali monomi.

28. La moltiplicazione delle quantità complesse si riduce a quella delle quantità monomie, considerando a parte ciascun termine del moltiplicando, e ciascun termine del moltiplicato-

(*) Per una conseguenza dell'analogia indicata nella nota della pagina 31 si chiama comunemente *dimensione* ciò che io chiamo *grado*. L'espressione riportata qui sopra avrebbe, nel linguaggio usato, 6 dimensioni. Quest'esempio ben dimostra l'assurdità dell'antica nomenclatura, stabilita sopra questo, che i prodotti di 2 o di 3 fattori misurano l'estensione delle superficie e i volumi dei corpi, quantità che hanno due o tre dimensioni; ma passato questo termine, la corrispondenza tra le espressioni algebriche e le figure geometriche cessa, poichè l'estensione non può aver mai più di tre dimensioni.

re, nel modo stesso che in Aritmetica, dovendosi moltiplicare due numeri composti, si opera in particolare sopra ciascuna delle loro cifre (*Aritm.* 33); la somma dei prodotti parziali compone quindi il prodotto totale. Ma l' Algebra colla presenza delle parti sottrattive offre talora una circostanza che non può mai incontrarsi nei numeri. In questi non sono mai termini da togliere, o parti sottrattive; le unità, le decine, le centinaja, ec. che li formano, sono sempre riguardate come sommate tra loro; ed allora evidentemente si scorge che il prodotto totale dev'essere composto dalla somma dei prodotti di ciascuna parte del moltiplicando per ciascuna parte del moltiplicatore.

La stessa conchiusione ha luogo quando si tratta di espressioni letterali in cui tutti i termini sono riuniti col segno $+$. Per esempio,

il prodotto della quantità $a+b$
moltiplicata per c

è $ac+bc$,

e si ottiene col moltiplicare ciascuna parte del moltiplicando pel moltiplicatore, e col sommare i due prodotti parziali ac e bc. Se il moltiplicando costasse di più di due parti, l' operazione sarebbe sempre la stessa.

Allorchè il moltiplicatore è la somma di più termini, egli è chiaro che il prodotto dev' essere formato dalla somma dei prodotti del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore. Così

il prodotto della grandezza $a+b$
moltiplicata per $c+d$

è $\left\{ \begin{array}{l} ac+bc \\ +ad+bd \end{array} \right.$;

perchè moltiplicando prima $a+b$ per c, si ottiene $ac+bc$, poi moltiplicando $a+b$ pel secondo termine d del moltiplicatore, si trova $ad+bd$, e la somma di questi due risultamenti dà $ac+bc+ad+bd$ pel prodotto totale.

29. Allorchè il moltiplicando contiene parti sottrattive, i prodotti di queste parti pel moltiplicatore debbono essere sottratti dagli altri, cioè debbono essere preceduti dal segno $-$. Per esempio,

il prodotto della quantità $a-b$
moltiplicata per c

è $ac-bc$;

perchè ogni volta che si prenderà tutta intera la quantità a, che avrebbe dovuto essere diminuita di b prima della moltipli-

cazione, si prenderà di soverchio la quantità b; dunque il prodotto ac, nel quale la quantità a tutta intera si trova compresa tante volte quante ne denota il numero c, supererà il prodotto cercato della quantità b, ripetuta tante volte quante n'esprime il numero c, cioè del prodotto bc; bisognerà dunque sottrarre bc da ac, il che darà, come sopra,

$$ac - bc.$$

Il medesimo ragionamento si applicherebbe a ciascuna delle parti sottrattive del moltiplicando, qualunque ne fosse il numero, e qualunque fosse quello dei termini del moltiplicatore, purchè questi fossero tutti affetti dal segno $+$. Se ora si riflette che i termini, che mancano di segno, debbono essere riguardati come preceduti dal segno $+$, sarà facile dedurre dagli esempi precedenti che i termini del moltiplicando affetti dal segno $+$, danno un prodotto parziale affetto dal segno $+$, mentre quelli che sono affetti dal segno $-$, lo danno affetto dal segno $-$. E da ciò segue che *quando il moltiplicatore parziale ha il segno $+$, il prodotto parziale ha il medesimo segno del moltiplicando parziale.*

30. Accade il contrario quando il moltiplicatore contiene parti sottrattive, cioè termini affetti dal segno $-$; allora i prodotti formati da questi termini debbono essere presi con un segno contrario a quello che avrebbero, stando alla regola precedente. Ciascuno potrà convincersene considerando attentamente l'esempio seguente.

Sia il moltiplicando $a - b$
il moltiplicatore $c - d$

il prodotto sarà $\begin{cases} ac - bc \\ - ad + bd; \end{cases}$

poichè il prodotto del moltiplicando pel primo termine c del moltiplicatore, in virtù della regola precedente, sarà $ac - bc$; ma prendendo per moltiplicatore il c tutto intero, in vece del c diminuito di d, che è il vero moltiplicatore, si viene a prendere la quantità $a - b$ tante volte di più quante ne denota il numero d; così il prodotto $ac - bc$ supera quello che si cerca, del prodotto di $a - b$ per d. Ora quest'ultimo prodotto, per le cose dimostrate, è $ad - bd$; e per sottrarlo dal primo, bisogna cangiargli i segni (20); si avrà dunque $ac - bc - ad + bd$ pel risultamento richiesto.

31. Riepilogando le conseguenze dedotte dagli esempi precedenti, si conchiuderà che *la moltiplicazione dei polinomi si*

esegue moltiplicando successivamente, giusta le regole date pei monomî (21 — 26), *tutti termini del moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, e avvertendo che se il moltiplicatore parziale ha il segno* $+$, *il prodotto parziale dee avere il medesimo segno del moltiplicando parziale, ed il segno contrario, se il moltiplicatore parziale ha il segno* $-$.

Sviluppando ora i differenti casi di quest' ultima regola, si troverà

1.° Che un termine che ha il segno $+$, moltiplicato per un termine che ha il segno $+$, dà un prodotto che ha il segno $+$;

2.° Che un termine che ha il segno $-$, moltiplicato per un termine che ha il segno $+$, dà un prodotto che ha il segno $-$;

3.° Che un termine che ha il segno $+$, moltiplicato per un termine che ha il segno $-$, dà un prodotto che ha il segno $-$;

4.° Che un termine che ha il segno $-$, moltiplicato per un termine che ha il segno $-$, dà un prodotto che ha il segno $+$.

Questo quadro fa vedere che *quando il moltiplicando ed il moltiplicatore parziali hanno il medesimo segno, il prodotto ha il segno* $+$, *e che quando essi hanno segni differenti, il prodotto ha il segno* $-$.

Per facilitare la pratica della moltiplicazione dei polinomî, ecco in succinto le regole che bisogna seguire in questa operazione.

1.° *Determinare il segno di ciascun prodotto parziale, secondo la regola stabilita di sopra*, che dice: *gli stessi segni danno più, i diversi, meno:* ecco la regola dei segni.

2.° *Formare il coefficiente, facendo il prodotto di quelli del moltiplicando e del moltiplicatore parziali* (22): questa è la regola dei coefficienti.

3.° *Scrivere di seguito le une alle altre tutte le lettere differenti contenute nel moltiplicando e nel moltiplicatore parziali* (21): questa è la regola delle lettere.

4.° *Dare alle lettere comuni al moltiplicando e al moltiplicatore parziali un esponente uguale alla somma di quelli che esse hanno in questo moltiplicando ed in questo moltiplicatore* (23): ecco la regola degli esponenti.

Con queste quattro regole si esegue subito la moltiplicazione d' un monomio per un monomio; ed in conseguenza quella d' un polinomio per un' altro.

32. L' esempio qui sotto offre l' applicazione di tutte le regole divisate.

Moltiplicando	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
Moltiplicatore	$a^3 - 4a^2b + 2b^3$
Prodotti parziali	$5a^7 - 2a^6b + 4a^5b^2$
	$- 20a^6b + 8a^5b^2 - 16a^4b^3$
	$+ 10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$

Risulta.[to] ridotto $5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$.

La prima linea dei prodotti parziali contiene quelli di tutti i termini del moltiplicando pel primo termine a^3 del moltiplicatore; e siccome si suppone che questo termine abbia il segno $+$, i prodotti che esso dà, hanno i medesimi segni dei termini corrispondenti del moltiplicando (31).

Il primo termine $5a^4$ del moltiplicando avendo il segno $+$, non si scriverà quello del primo prodotto parziale, che pure sarebbe $+$; il coefficiente 5 di a^4 essendo moltiplicato pel coefficiente 1 di a^3, dà 5 per quello del prodotto parziale; la somma dei due esponenti della lettera a è $4 + 3$, ovvero 7: il primo prodotto parziale sarà dunque $5a^7$.

Il secondo termine $- 2a^3b$ del moltiplicando avendo il segno $-$, il prodotto avrà il segno $-$; il coefficiente 2 di a^3b, moltiplicato pel coefficiente 1 di a^3, produce 2 pel coefficiente del prodotto; l'esponente della lettera a, comune ai termini che si moltiplicano, è $3 + 3$, ovvero 6, e si scrive di seguito la lettera b, la quale non si trova che nel moltiplicando parziale: il secondo prodotto parziale è dunque $- 2a^6b$.

Il terzo tèrmine $+ 4a^2b^2$ dà un prodotto parziale affetto dal segno $+$, e per le regole applicate ai due termini precedenti, si trova $+ 4a^5b^2$.

La seconda linea contiene i prodotti di tutti i termini del moltiplicando pel secondo termine $- 4a^2b$ del moltiplicatore; e siccome quest'ultimo ha il segno $-$, tutti i prodotti che esso dà, debbono avere segni contrari a quelli dei termini corrispondenti del moltiplicando: i coefficienti, le lettere e gli esponenti si formeranno come nella linea precedente.

La terza linea finalmente abbraccia i prodotti di tutti i termini del moltiplicando pel terzo termine $+ 2b^3$ del moltiplicatore; questo termine avendo il segno $+$, tutti i prodotti che esso dà, hanno il medesimo segno dei termini corrispondenti del moltiplicando.

Dopo di aver formati tutti i prodotti parziali di cui si compone il prodotto totale, si esaminerà attentamente quest'ultimo, per vedere se mai rinchiude termini simili. Allorchè ne contiene, questi si riducono, secondo la regola del numero 19, osservando che due termini, per essere simili, deb-

bono non solo costare delle medesime lettere, ma queste debbono essere ancora affette dagli stessi esponenti. Nell' esempio di sopra vi sono tre riduzioni, cioè:

$$-2a^6b \text{ e } -20a^6b\text{, il che dà } -22a^6b\text{;}$$
$$+4a^5b^2 \text{ e } +8a^5b^2\text{, il che dà } +12a^5b^2\text{;}$$
$$-16a^4b^3 \text{ e } +10a^4b^3\text{, il che dà } -6a^4b^3.$$

Fatte queste riduzioni, si ha per risultamento l' ultima linea dell' esempio.

Ecco inoltre, per esercitare il lettore, un altro esempio di moltiplicazione, facile ad eseguirsi dietro ciò che precede.

Moltiplicando	$5a^4b^2 + 7a^3b^3 - 15a^5c + 23b^2d^4 - 17bc^3d^2 - 9abcdm^2$
Moltiplicatore	$11b^3 - 8c^3 + 5abc - 2bdm$
Prodotti parziali	$55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 165a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2$ $- 40a^4b^2c^3 - 56a^3b^3c^3 + 120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2$ $+ 25a^5b^3c + 35a^4b^4c - 75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2 - 45a^2b^2c^2dm^2$ $- 10a^4b^3dm - 14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^3d^3m + 18ab^2cd^2m^3$
Risultamento ridotto	$55a^4b^5 + 77a^3b^6 - 140a^5b^3c + 253b^5d^4 - 187b^4c^3d^2 - 99ab^4cdm^2 - 40a^4b^2c^3 - 56a^3b^3c^3$ $+ 120a^5c^4 - 184b^2c^3d^4 + 136bc^6d^2 + 72abc^4dm^2 + 35a^4b^4c - 75a^6bc^2 + 115ab^3cd^4 - 85ab^2c^4d^2$ $- 45a^2b^2c^2dm^2 - 10a^4b^3dm - 14a^3b^4dm + 30a^5bcdm - 46b^3d^5m + 34b^2c^3d^3m + 18ab^2cd^2m^3.$

33. Dalle regole stabilite per la moltiplicazione delle quantità algebriche chiaramente risulta che se i termini del moltiplicando sono tutti di un medesimo grado (27), e di un medesimo grado ancora tutti quelli del moltiplicatore, tutti i termini del prodotto saranno di un grado espresso dalla somma dei numeri che denotano il grado dei termini di ciascun fattore.

Nel primo esempio il moltiplicando è del quarto grado, il moltiplicatore del terzo; il prodotto è del sottimo.

Nel secondo esempio il moltiplicando è del sesto grado, il moltiplicatoro del terzo; il prodotto è del nono.

Le espressioni simili alle rammentate, i cui termini sono tutti del medesimo grado, si chiamano espressioni *omogenee*; e l'osservazione fatta circa i loro prodotti, è utile a prevenire gli errori che si potrebbero commettere dimenticando qualcuno dei fattori nelle moltiplicazioni parziali.

34. Le operazioni algebriche eseguite sopra quantità letterali, facendoci scorgere come le diverse parti di queste quantità concorrono alla formazione dei risultamenti, ci guidano spesso allo scoprimento delle proprietà generali dei numeri, indipendentemente da qualunque sistema di numerazione. Le moltiplicazioni seguenti conducono a conseguenze di questo genere, le quali sono notabilissime e di un'applicazione assai frequente in appresso.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ a+b \\ \hline a^3+2a^2b+ab^2 \\ +a^2b+2ab^2+b^3 \\ \hline a^3+3a^2b+3ab^2+b^3. \end{array}$$

La prima moltiplicazione, dalla quale risulta che la quantità $a+b$, moltiplicata per $a-b$, dà a^2-b^2, dimostra che *il prodotto della somma di due numeri, moltiplicata per la loro differenza, è uguale alla differenza dei quadrati dei numeri stessi.*

Se si prende, per esempio, la somma 11 dei numeri 7 e 4, e si moltiplica per la differenza 3 di questi numeri, il prodotto 3×11, ovvero 33, sarà ugualo alla differenza tra 49, quadrato di 7, e 16, quadrato di 4.

Dal secondo esempio, nel quale $a + b$ è due volte fattore, si apprende che *la seconda potenza, o sia il quadrato di una quantità composta di due parti* a *e* b, *contiene il quadrato della prima parte, più il doppio del prodotto della prima parte per la seconda, più il quadrato della seconda parte.*

Il terzo esempio, ove si è moltiplicata la seconda potenza di $a + b$ per la prima, c' insegna che *la terza potenza, o il cubo di una quantità composta di due parti, contiene il cubo della prima parte, più tre volte il quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più tre volte la prima moltiplicata pel quadrato della seconda, più finalmente il cubo della seconda parte.*

35. Siccome spesso è necessario scomporre una quantità nei suoi fattori, e lasciare sempre in veduta, il più che è possibile, la formazione delle quantità che si considerano, così le operazioni algebriche non si effettuano che quando assolutamente non può farsene di meno; e per questa ragione è d'uopo stabilire segni adattati ad indicare la moltiplicazione delle quantità complesse.

Si usano a tale oggetto lo parentesi, o grappe, e tra queste si racchiudono i differenti fattori del prodotto che si vuole indicare. Così l' espressione

$$(5a^4 - 3a^2b^2 + b^4)(4ab^2 - ac^2 + d^3)(b^2 - c^2)$$

accenna, per esempio, il prodotto delle quantità complesse

$$5a^4 - 3a^2b^2 + b^4,\ 4ab^2 - ac^2 + d^3 \text{ e } b^2 - c^2.$$

Alcuni autori di data un poco remota per lo stesso fine si sono serviti di linee poste al di sopra dei fattori, come si vede qui sotto:

$$\overline{5a^4 - 3a^2b^2 + b^4} \times \overline{4ab^2 - ac^2 + d^3} \times \overline{b^2 - c^2};$$

ma le linee potendo riuscire prolungate più o meno di quel che bisogna, rendono questo segno meno preciso delle parentesi, le quali non lasciano mai equivoco sulla totalità delle quantità comprese in ciascun fattore; perciò esse hanno prevaluto.

Della divisione delle quantità algebriche.

36. La divisione algebrica, al pari della divisione aritmetica, dev' essere considerata come un' operazione che serve a scoprire uno dei fattori di un prodotto dato, quando si conosce l'altro fattore. Da questa definizione si raccoglie, che il quoziente moltiplicato pel divisore dee riprodurre il dividendo.

Applicando queste nozioni alle quantità monomie, e riflettendo a ciò che nel numero 21 è stato dimostrato intorno alla moltiplicazione delle medesime, si vedrà che il dividendo è

formato dai fattori del divisore e da quelli del quoziente; dunque *cancellando nel dividendo tutti i fattori che compongono il divisore, il risultamento sarà il quoziente cercato.*

Per esempio, il monomio $72a^5b^3c^2d$ si debba dividere pel monomio $9a^3bc^2$; è d'uopo, per la regola ultimamente enunciata, cancellare nella prima di queste quantità i fattori della seconda, che sono

$$9,\quad a^3,\quad b \text{ e } c^2:$$

bisogna dunque, perchè la divisione possa eseguirsi, che tali fattori siano nel dividendo. Prendendoli per ordine, si vede primieramente che il coefficiente 9 del divisore dev'essere fattore del coefficiente 72 del dividendo, cioè che 9 deve dividere esattamente 72; e ciò accade in effetto, poichè $72 = 9 \times 8$; togliendo dunque il fattore 9, rimarrà il fattore 8 per coefficiente del quoziente.

Segue ancora dalle regole della moltiplicazione (25), che l'esponente 5 della lettera a nel dividendo è la somma degli esponenti che essa ha nel divisore e nel quoziente; dunque l'esponente che la lettera a dovrà avere nel quoziente, sarà la differenza tra gli altri due, o sia $5 - 3 = 2$; dunque la lettera a avrà nel quoziente l'esponente 2. Per la ragione medesima la lettera b avrà nel quoziente un esponente uguale a $3 - 1$, o sia 2. Finalmente il fattore c^2 essendo comune al dividendo e al divisore, dev'essere tolto; e si avrà per conseguenza

$$8a^2b^2d$$

pel domandato quoziente.

Si ragionerà nel modo stesso sopra ogni altro esempio; e da ciò che precede si conchiuderà che, *per eseguire la divisione delle quantità monomie, bisogna prima dividere il coefficiente del dividendo per quello del divisore;*

Poi cancellare nel dividendo le lettere che ha di comune col divisore, qualora esse hanno il medesimo esponente; e quando l'esponente è diverso, sottrarre dall'esponente del dividendo quello del divisore, il resto essendo l'esponente che la lettera deve avere nel quoziente;

In fine scrivere nel quoziente le lettere del dividendo che non si trovano nel divisore.

37. Applicando la regola stabilita qui sopra per formare l'esponente delle lettere del quoziente ad una lettera che avesse lo stesso esponente nel dividendo e nel divisore, si troverebbe zero per l'esponente che essa dovrebbe avere nel quoziente: per esempio, a^3 diviso per a^3 darebbe per quoziente a^0. Per sapere intanto cosa mai possa significare una tale espressione, è necessario risalire alla sua origine, e considerare che, rap-

presentando essa il quoziente della divisione della quantità a^3 divisa per sè stessa, deve corrispondere necessariamente all'unità, la quale rappresenta appunto quante volte una quantità qualunque è contenuta in sè stessa. Risulta da ciò che *l'espressione a^0 è un simbolo equivalente all'unità, e che in conseguenza in sua vece dee sostituirsi* 1. Può dunque tralasciarsi di scrivere nel quoziente le lettere che hanno zero per esponente, perchè allora ciascuna di esse non rappresenta che l'unità. Così dividendo a^3bc^2 per a^2bc^2, si avrà per quoziente $a^1b^0c^0$, e questo si riduce ad a, perchè $b^0 = c^0 = 1$, come ognuno può anche assicurarsene praticando in effetto l'ommissione dei fattori comuni al dividendo e al divisore.

Da ciò ognuno comprende che questa proposizione: *Ogni quantità che ha zero per esponente, è uguale ad* 1, non è a parlar propriamente che la spiegazione di un risultamento al quale conduce la convenzione fatta sulla maniera di scrivere le potenze delle quantità mediante i loro esponenti.

Perchè la divisione possa eseguirsi, bisogna 1.° che il divisore non contenga alcuna lettera che non si trovi nel dividendo; 2.° che l'esponente delle lettere nel divisore non superi quello che esse hanno nel dividendo; 3.° finalmente che il coefficiente del divisore divida esattamente quello del dividendo.

38. Quando tutte queste condizioni non hanno luogo, la divisione non può che indicarsi sotto la forma di una frazione, secondo la convenzione del numero 2; e bisogna cercare dopo di rendere più semplice questa frazione. cancellando i fattori che si trovano al tempo stesso nel dividendo e nel divisore, se pur ve ne sono; poichè (*Aritm.* 57) è manifesto che i principî sopra i quali riposa la teoria delle frazioni aritmetiche, essendo indipendenti da qualunque valore particolare dei loro termini, convengono tanto alle frazioni rappresentate da lettere, quanto a quelle che sono espresse da numeri.

Secondo questi principî, *si tolgono via primieramente i fattori numerici comuni ai coefficienti del dividendo e del divisore; poi le lettere che sono comuni al dividendo e al divisore, e che hanno il medesimo esponente nell'uno e nell'altro. Allorchè l'esponente non è lo stesso, si toglie il più piccolo dal più grande, ed il resto si dà per esponente alla lettera, la quale non si scrive che in quello dei due termini della frazione dov'essa aveva l'esponente più grande.*

L'esempio seguente rischiarerà questa regola generale.

Sia $48a^3b^5c^2d$ da dividersi per $64a^3b^3c^4e$; il quoziente non può che indicarsi sotto la forma frazionaria

$$\frac{48a^3b^5c^2d}{64a^3b^3c^4e};$$

ma siccome i coefficienti 48 e 64 sono ambedue divisibili per 16, ommettendo questo fattore comune, il coefficiente del numeratore diverrà 3, e quello del denominatore 4.

La lettera a avendo il medesimo esponente 3 nei due termini della frazione, ne segue che a^3 è un fattore comune al dividendo e al divisore, e che si può parimente ommettere.

Per conoscere il numero dei fattori b comuni ai due termini della frazione, bisogna dividere la potenza più alta, che è b^5, per b^3, secondo la regola data più sopra, ed il quoziente b^2 c' insegna che $b^5 = b^3 \times b^2$. Cancellando dunque il fattore comune b^3, resterà nel numeratore il fattore b^2.

In quanto alla lettera c, il fattore più elevato c^4 sta nel denominatore, e se si divide per c^2, si scomporrà in $c^2 \times c^2$; cancellando dunque il fattore c^2, comune ai due termini, questa lettera sparirà dal numeratore, ma resterà nel denominatore coll' esponente 2.

Finalmente le lettere d ed e resteranno nei loro posti rispettivi, poichè nello stato in cui esse sono, non indicano alcun fattore che sia comune ai due termini della frazione.

Mediante queste diverse operazioni la frazione proposta riducesi a

$$\frac{3b^2d}{4c^2e};$$

e questa è la sua più semplice espressione sino a che non si daranno valori numerici alle lettere; perchè la detta frazione potrebbe essere ridotta ancora di più, se a queste lettere venissero sostituiti numeri contenenti fattori comuni.

39. Ma non dee ommettersi un' importante osservazione, ed è, che se tutti i fattori del dividendo esistessero nel divisore, il quale di più ne contenesse ancora altri che gli fossero particolari, sarebbe necessario, dopo di aver tolto i primi fattori, mettere l'unità in luogo del dividendo, o sia del numeratore della frazione. Di fatti in questo caso si possono cancellare nei due termini della frazione tutti i fattori del numeratore, vale a dire, si possono dividere i due termini della frazione pel numaratore; ma quest' ultimo essendo diviso per sè medesimo, dee dare l'unità per quoziente, di cui bisogna farne il nuovo numeratore.

Sia, per esempio, la frazione

$$\frac{4a^2bc}{12a^2b^3cd};$$

i fattori 12, a^2, b^3 e c sono divisibili respettivamente pei fattori 4, a^2, b e c, ed è come se si dividessero i due termini

della frazione proposta pel numeratore $4a^2bc$; ora la quantità $4a^2bc$ divisa per se stessa dà 1 per quoziente, e la quantità $12a^2b^3cd$ divisa per la prima dà, in virtù delle regole stabilite, $3b^2d$; la nuova frazione è dunque

$$\frac{1}{3b^2d}.$$

40. Segue dalle regole della moltiplicazione, che quando una quantità monomia moltiplica una quantità polinomia, essa diventa fattore comune di tutti i termini di quest'ultima. Si profitta di tale osservazione per rendere più semplici le frazioni, il cui numeratore e denominatore sono polinomi che hanno fattori comuni a tutti i loro termini.

Sia l'espressione

$$\frac{6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2}{9a^2b - 15a^2c + 24a^3};$$

esaminando la quantità $6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2$, si vede che il fattore a^2 è comune a tutti i di lei termini, poichè $a^4 = a^2 \times a^2$, e che inoltre i numeri 6, 3 e 12 sono tutti divisibili per 3; di maniera che

$$6a^4 - 3a^2bc + 12a^2c^2 = 2a^2 \times 3a^2 - bc \times 3a^2 + 4c^2 \times 3a^2.$$

Parimente il denominatore ha per fattore comune $3a^2$, perchè i fattori a^2 e 3 entrano in tutti i suoi termini, e si ha

$$9a^2b - 15a^2c + 24a^3 = 3b \times 3a^2 - 5c \times 3a^2 + 8a \times 3a^2.$$

Cancellando dunque il fattore $3a^2$ sì nel numeratore che nel denominatore, la frazione proposta diverrà

$$\frac{2a^2 - bc + 4c^2}{3b - 5c + 8a}.$$

41. Passo ora al caso in cui il dividendo e il divisore sono ambedue complessi, ed in cui non si può più conoscere a prima vista se il divisore sia o no fattore del dividendo.

Poichè il divisore, moltiplicato pel quoziente, dee riprodurre il dividendo, bisogna che quest'ultimo contenga tutti i prodotti parziali di ciascun termine del divisore per ciascun termine del quoziente; e se si potessero trovare i prodotti formati da ciascun termine del divisore in particolare, dividendoli per questo termine ch'è noto, si otterrebbero quelli del quoziente, nella medesima maniera che in Aritmetica si scoprono tutte le cifre del quoziente, dividendo successivamente pel divisore i numeri che si riguardano come i prodotti par-

ziali di questo divisore per le diverse cifre del quoziente. Ma nei numeri questi prodotti parziali si presentano per ordine, principiando dalle unità situate nell'ultimo posto sulla sinistra, a motivo della subordinazione stabilita tra le unità di ciascuna cifra del dividendo dipendentemente dal posto ch'esse occupano. Non accade lo stesso in Algebra; ma vi si supplisce col disporre tutti i termini del dividendo e del divisore in modo, che gli esponenti delle potenze della stessa lettera diminuiscano in ciascun termine, andando dalla sinistra verso la destra, nella guisa che vedesi, per rapporto alla lettera a, nelle quantità

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$

$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

delle quali una è il prodotto, e l'altra il moltiplicando nell'operazione del numero 32: questo è ciò che si dice *ordinare* le quantità proposte.

Quando esse sono così disposte, è evidente che, qualunque sia il fattore pel quale bisogna moltiplicare la seconda per ottenere la prima, il termine $5a^7$, con cui questa comincia, risulta dal termine $5a^4$, col quale comincia l'altra, moltiplicato pel termine ove a avesse il più alto esponente nel fattore cercato, e che trovasi il primo in questo fattore allorchè esso è ordinato per rapporto ad a. Dividendo adunque il monomio $5a^7$ pel monomio $5a^4$, il quoziente a^3 sarà il primo termine del fattore cercato. Ora, per le regole della moltiplicazione, il prodotto totale dovendo contenere i diversi prodotti parziali risultanti dalla moltiplicazione di tutto il moltiplicando per ciascun termine del moltiplicatore, ne segue che la quantità presa qui per dividendo, dee contenere i prodotti di tutti i termini del divisore $5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$ per a^3, primo termine del quoziente; ed in conseguenza se si tolgono dal dividendo questi prodotti, che sono $5a^7, -2a^6b, +4a^5b^2$, il resto $-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ non conterrà altri termini se non quelli che risultano dalla moltiplicazione del divisore pel secondo, pel terzo ec. termine del quoziente.

Questo resto può dunque essere considerato come un dividendo parziale; ed il suo primo termine, nel quale a ha l'esponente il più alto, non ha potuto derivare che dalla moltiplicazione del primo termine del divisore pel secondo del quoziente. Ma il primo termine del dividendo parziale avendo il segno $-$, bisogna assegnare quello che deve avere il termine corrispondente del quoziente: ora questo è assai facile mercè la 1.ª regola del numero 31; perchè la quantità $-20a^6b$, riguardata come un prodotto parziale, avendo un segno contrario a quello del moltiplicando parziale $5a^4$, ne risulta che il moltiplicatore parziale ha dovuto essere affetto dal segno $-$. La divisione venendo adunque eseguita sopra i mo-

nomi $-20a^6b$ e $5a^4$, darà $-4a^2b$ per questo secondo termine. Se si moltiplica questo termine per tutti quelli del divisore, e si toglie il prodotto dal dividendo parziale, il resto $+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$ altro non conterrà che i prodotti del divisore pel terzo, e successivi termini del quoziente.

E riguardando questo resto come un nuovo dividendo parziale, il suo primo termine $10a^4b^3$ non può essere che il prodotto del primo termine del divisore pel terzo termine del quoziente; e per conseguenza quest' ultimo si otterrà dividendo l' uno per l' altro i monomi $10a^4b^3$ e $5a^4$. Il quoziente $2b^3$ essendo moltiplicato per tutto il divisore, dà prodotti la cui sottrazione esaurendo il dividendo parziale, prova che il quoziente non ha che tre termini.

Se avesse dovuto averne un maggior numero, si sarebbero evidentemete trovati come i precedenti; e se, come si suppone, il dividendo ha per fattore il divisore, la sottrazione del prodotto di questo divisore per l' ultimo termine del quoziente deve sempre esaurire l' ultimo dividendo parziale.

42. Per facilitare la pratica delle regole trovate qui sopra,

1.° *Si dispongano il dividendo e il divisore come per la divisione dei numeri, ordinandoli ambedue per rapporto ad una medesima lettera, vale a dire scrivendo i loro termini in modo che gli esponenti di questa lettera vadano decrescendo;*

2.° *Si divida il primo termine del dividendo pel primo termine del divisore, e si scriva il risultamento nel posto assegnato al quoziente;*

3.° *Si moltiplichi tutto il divisore pel quoziente parziale che si è trovato, il prodotto si tolga dal dividendo, e si faccia la riduzione dei termini simili;*

4.° *Si riguardi questo resto come un nuovo dividendo di cui si divida il primo termine pel primo termine del divisore; si scriva il risultamento come un secondo termine del quoziente, e si prosegua l' operazione sopra questo termine come prima, fino a tanto che tutti i termini del dividendo siano esauriti.*

Ed osservando che un prodotto ha il medesimo segno del moltiplicando allorchè il moltiplicatore ha il segno $+$, e che nel caso contrario ha il segno $-$ (31), se ne conchiude che *quando il dividendo parziale ed il primo termine del divisore hanno il medesimo segno, il quoziente dee avere il segno $+$; e se essi hanno segni contrari, il quoziente deve avere il segno $-$*: questa è la regola dei segni.

La regola dei segni è dunque la stessa sì nella moltiplicazione che nella divisione dei monomi; nell' un' operazione e nell' altra *i medesimi segni danno $+$, i diversi, $-$*.

Le divisioni parziali si effettuano mercè le regole date per le quantità monomie relativamente ai coefficienti, alle lettere ed agli esponenti.

Si divida il coefficiente del dividendo per quello del divisore: questa è la regola dei coefficienti.

Si scrivano nel quoziente le lettere comuni al dividendo e al divisore con un esponente uguale alla differenza di quelli dai quali sono affette in questi due termini; e finalmente si scrivano nel quoziente le lettere le quali non si trovano che nel solo dividendo: e queste sono le regole delle lettere e degli esponenti.

43. Per applicare queste regole alle quantità

$$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5,$$
$$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2,$$

delle quali più sopra mi sono servito d'esempio, si disporranno come se si trattasse di eseguire la divisione aritmetica.

	Dividendo	*Divisore*
	$5a^7 - 22a^6b + 12a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	$5a^4 - 2a^3b + 4a^2b^2$
	$-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2$	*Quoziente*
		$a^3 - 4a^2b + 2b^3$
Resto	$-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
	$+20a^6b - 8a^5b^2 + 16a^4b^3$	
Resto	$+10a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5$	
	$-10a^4b^3 + 4a^3b^4 - 8a^2b^5$	
Resto	0.	

Il segno del primo termine $5a^7$ del dividendo essendo lo stesso che quello di $5a^4$, primo termine del divisore, si dovrebbe porre nel quoziente il segno $+$; ma come trattasi del primo termine, questo segno si ommetterà.

Dividendo $5a^7$ per $5a^4$, si ha per quoziente a^3, che si scriverà sotto il divisore nel posto assegnato al quoziente.

Moltiplicando successivamente i tre termini del divisore pel primo termine a^3 del quoziente, e scrivendo i prodotti sotto i termini corrispondenti del dividendo, dopo aver cangiati i segni di questi prodotti per sottrarli (20), si formerà la quantità

$$-5a^7 + 2a^6b - 4a^5b^2,$$

di cui farassi la riduzione col dividendo; e si otterrà per residuo

$$-20a^6b + 8a^5b^2 - 6a^4b^3 - 4a^3b^4 + 8a^2b^5.$$

Continuando la divisione sopra questo residuo, il primo termine $-20a^6b$, diviso per $5a^4$, darà per quoziente $-4a^2b$,

e questo quoziente viene affetto dal segno —, perchè il dividendo e il divisore hanno segni differenti. Moltiplicandolo intanto per tutti i termini del divisore, e cangiando i segni, si formerà la quantità

$$+20a^6b-8a^5b^2+16a^4b^3,$$

della quale si farà la riduzione col dividendo, e si avrà per residuo

$$+10a^4b^3-4a^3b^4+8a^2b^5.$$

Dividendo il primo termine $10a^4b^3$ di questo nuovo dividendo parziale pel primo termine $5a^4$ del divisore; moltiplicando pel risultamento $+2b^3$ tutto il divisore; scrivendo i prodotti coi segni cangiati sotto il dividendo parziale, e facendo la riduzione, niente rimane, il che mostra che $+2b^3$ è l'ultimo termine del quoziente cercato, il quale per conseguenza ha per espressione $a^3-4a^2b+2b^3$.

44. Cade qui a proposito l'osservare che nella divisione le moltiplicazioni dei differenti termini del quoziente pel divisore producono spesso termini, che non si trovano nel dividendo, ed i quali bisogna dividere in seguito pel primo termine del divisore. Questi termini sono per lo appunto quelli che si sono distrutti, quando si è formato il dividendo colla moltiplicazione dei suoi due fattori, il quoziente e il divisore. Ecco un esempio notabile di siffatte riduzioni.

Sia a^3-b^3 da dividersi per $a-b$:

Il primo termine a^3 del dividendo, diviso pel primo termine a del divisore, dà per quoziente a^2; moltiplicando questo quoziente pel divisore, e cangiando i segni dei prodotti, si trova $-a^3+a^2b$: il termine $-a^3$ distrugge il primo termine del dividendo; ma resta il termine a^2b, che non si trovava da

principio nel dividendo. E poichè esso contiene la lettera a, può anche essere diviso pel primo termine del divisore; si faccia questa divisione, e si avrà $+ab$. Moltiplicando ora questo quoziente pel divisore, e cambiando i segni dei prodotti, viene $-a^2b+ab^2$: il termine $-a^2b$ distrugge il precedente; ma rimane il termine $+ab^2$, che pure non era nel dividendo. Si divida questo termine per a, ed otterrassi per quoziente $+b^2$; moltiplicando poi questo quoziente parziale pel divisore, emergerà, dopo aver cangiati i segni, $-ab^2+b^3$: il primo termine $-ab^2$ annullerà il precedente, ed il secondo $+b^3$ distruggerà l' ultimo termine $-b^3$ che restava del dividendo.

Per ben comprendere il meccanismo della divisione, basta dare un'occhiata alla moltiplicazione del divisore $a-b$ pel quoziente a^2+ab+b^2, situata a fianco della divisione precedente; si vedrà che tutti i termini riprodotti nelle divisioni parziali sono quelli che si distruggono, quando si fa la riduzione nel prodotto della moltiplicazione.

45. Accade talvolta che la quantità rispetto alla quale si ordina, si trovi elevata alla medesima potenza in più termini, sia del dividendo, sia del divisore. In tal caso è d' uopo disporre questi termini in una medesima colonna, o pure scriverli di seguito gli uni agli altri, avvertendo di ordinarli tra loro per rapporto ad un'altra lettera.

La quantità $-a^4b^2+b^2c^4-a^2c^4-a^6+2a^4c^2+b^6+2b^4c^2+a^2b^4$ si debba dividere per $a^2-b^2-c^2$.

Ordinando la prima di queste quantità relativamente alla lettera a, si disporranno in una medesima colonna i termini $-a^4b^2$ e $+2a^4c^2$, in un'altra i termini $+a^2b^4$ e $-a^2c^4$, e finalmente in un' ultima colonna i tre termini $+b^6$, $+2b^4c^2$, $+b^2c^4$, ordinandoli per rapporto alla lettera b, come vedesi praticato nella pagina seguente.

Il primo termine $-a^6$ del dividendo venendo diviso pel primo termine a^2 del divisore, darà $-a^4$ per primo termine del quoziente; formando in seguito i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, cangiando i segni di questi prodotti, onde sottrarli dal dividendo, e situando in una medesima colonna i termini affetti dalla stessa potenza di a, si otterrà, dopo la riduzione dei termini simili, il 1.° residuo, che prenderassi per secondo dividendo parziale.

Il primo termine $-2a^4b^2$ di questo nuovo dividendo essendo diviso per a^2, darà per secondo termine del quoziente $-2a^2b^2$; formando poi i prodotti di questo quoziente per tutti i termini del divisore, mutando i segni di questi prodotti per sottrarli dal dividendo parzialo, e disponendo in una medesima colonna i termini affetti dalla stessa potenza di a, consegui-

rassi, dietro la riduzione dei termini simili, il 2.° residuo, che si assumerà per un terzo dividendo parziale.

Proseguendo nel modo stesso l'operazione sopra il 2.° residuo, sopra i seguenti, si troveranno tre altri termini del quoziente. L'ultimo di questi venendo moltiplicato per tutti i termini del divisore, darà prodotti tali, che sottratti tutti dal 4.° residuo, lo distruggeranno interamente: la divisione dunque succede esatta, e perciò il divisore è fattore del dividendo. Ecco il quadro di tutta l'operazione.

$$
\begin{array}{l|l}
\begin{array}{ll}
 & -a^6 - a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 \\
 & \quad + 2a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 \\
 & \qquad\qquad\quad + b^2c^4 \\
 & +a^6 - a^4b^2 \\
 & \quad - a^4c^2 \\
\hline
1.^\circ \text{ resto} & -2a^4b^2 + a^2b^4 + b^6 \\
 & + a^4c^2 - a^2c^4 + 2b^4c^2 \\
 & \qquad\qquad\quad + b^2c^4 \\
 & + 2a^4b^2 - 2a^2b^4 \\
 & \qquad - 2a^2b^2c^2 \\
\hline
2.^\circ \text{ resto} & + a^4c^2 - a^2b^4 + b^6 \\
 & \quad - 2a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 \\
 & \quad - a^2c^4 + b^2c^4 \\
 & - a^4c^2 + a^2b^2c^2 \\
 & \quad + a^2c^4 \\
\hline
3.^\circ \text{ resto} & - a^2b^4 + b^6 \\
 & - a^2b^2c^2 + 2b^4c^2 \\
 & \qquad + b^2c^4 \\
 & + a^2b^4 - b^6 \\
 & \qquad - b^4c^2 \\
\hline
4.^\circ \text{ resto} & - a^2b^2c^2 + b^4c^2 \\
 & \qquad + b^2c^4 \\
 & + a^2b^2c^2 - b^4c^2 \\
 & \qquad - b^2c^4 \\
\hline
 & \qquad 0.
\end{array}
&
\begin{array}{l}
a^2 - b^2 - c^2 \\
\hline
- a^4 - 2a^2b^2 - b^4 \\
\quad + a^2c^2 - b^2c^2
\end{array}
\end{array}
$$

46. Alcune volte si facilita la divisione scomponendo a colpo d'occhio una quantità nei suoi fattori. Se, a cagion d'esempio, si avesse a dividere $8a^6 - 4a^2b^2 + 4a^3 + 2a^3 - b^2 + 1$ per $2a^3 - b^2 + 1$, come questo divisore forma i tre ultimi ermini del dividendo, basterebbe cercare se esso è fattore

dei tre primi ; ora questi hanno palesamente per fattore comune $4a^3$, poichè $8a^6 - 4a^3b^2 + 4a^3 = 4a^3(2a^3 - b^2 + 1)$. In grazia di questa osservazione il dividendo assumerebbe la

forma $\quad 4a^3(2a^3 - b^2 + 1) + 2a^3 - b^2 + 1$,

ovvero $\quad (2a^3 - b^2 + 1)(4a^3 + 1)$:

la divisione si eseguirebbe dunque immediatamente, togliendo il fattore $2a^3 - b^2 + 1$ eguale al divisore, ed il quoziente sarebbe $4a^3 + 1$.

L'abitudine al calcolo algebrico suggerirà moltissime osservazioni di questo genere, per mezzo delle quali si abbreviano le operazioni, e si perverrà facilmente a vedere come una quantità si risolva nei suoi fattori. Queste scomposizioni si rendono spesse evidentissime, quando in vece di eseguire le moltiplicazioni che si presentano, non si fa che indicarle.

Delle frazioni algebriche.

47. Quando il modo di fare la divisione algebrica viene applicato a due quantità delle quali una non è fattore dell'altra, l'impossibilità di praticarlo si riconosce da questo, che nel corso delle operazioni si giugne ad un residuo, il cui primo termine non può essere diviso per quello del divisore. Eccone un esempio :

$$\begin{array}{lr|l}
 & a^3 + a^2b + 2b^3 & a^2 + b^2 \\ \cline{3-3}
 & -a^3 - ab^2 & a + b \\ \cline{2-2}
1.^\circ \text{ resto} & a^2b - ab^2 + 2b^3 & \\
 & -a^2b - b^3 & \\ \cline{2-2}
2.^\circ \text{ resto} & -ab^2 + b^3. &
\end{array}$$

Il primo termine $-ab^2$ del secondo residuo non può dividersi esattamente per a^2, primo termine del divisore; perciò la divisione a questo punto si arresta. Si potrebbe aggiungere, come in Aritmetica, al quoziente $a + b$ la frazione $\dfrac{-ab^2 + b^3}{a^2 + b^2}$, che ha per numeratore il residuo, e per denominatore il divisore; ed il quoziente sarebbe

$$a + b + \frac{b^3 - ab^2}{a^2 + b^2}.$$

Si vede facilmente da questo esempio che *la divisione deve*

arrestarsi quando si perviene ad un residuo il cui primo termine contiene la lettera, rispetto alla quale si è ordinato, elevata ad una potenza inferiore a quella della medesima lettera nel primo termine del divisore.

48. Allorchè la divisione algebrica di due quantità non può farsi esattamente, l' espressione del quoziente resta indicata sotto forma frazionaria, assumendo il dividendo per numeratore e il divisore per denominatore; e per ridurla al maggior grado di semplicità possibile, è d' uopo cercare se il dividendo e il divisore abbiano fattori comuni, per toglierli (38). Ma quando si tratta di polimonî, i fattori comuni non si possono scoprire con quella stessa facilità che nei monomî; non si trovano in generale che cercando *il massimo comun divisore* delle due quantità proposte con un metodo analogo a quello stabilito in Aritmetica pei numeri.

Le grandezze ralative delle espressioni algebriche non si potrebbero assegnare, senza dar prima valori individuati alle lettere che contengono; dunque la denominazione di *massimo comun divisore*, adattata a queste espressioni, non dee esser presa rigorosamente nel medesimo senso che nell' Aritmetica.

In Algebra bisogna intendere per *massimo comun divisore* di due espressioni quello tra i loro divisori comuni che contiene più fattori in tutti i suoi termini, vale a dire, che è del più alto grado (27). Come in Aritmetica, così in Algebra la ricerca del massimo comun divisore riposa sopra questo principio: *Ogni divisore comune a due quantità, dee dividere il residuo della loro divisione.*

La dimostrazione datane nel numero 61 dell' Aritmetica diventa più chiara adoperandovi i simboli algebrici. In fatti siano A e B le due quantità proposte, D il loro divisore comune, Q il quoziente della divisione di A per B ed R il residuo; e siccome nelle divisioni che non succedono esattamente, il dividendo è uguale al prodotto del divisore pel quoziente, sommato col residuo, così avrassi.

$$A = BQ + R.$$

Se ora si dividono i due membri di questa equazione per D, verrà

$$\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D};$$

e ponendo $\frac{A}{D} = a$, $\frac{B}{D} = b$, quozienti esatti per ipotesi, l' e-

quazione di sopra si cangerà in

$$a = bQ + \frac{R}{D},$$

dalla quale si trae

$$a - bQ = \frac{R}{D},$$

trasportando il termine bQ dal secondo nel primo membro. E poichè il primo membro, che in questo caso dev' esser composto dai medesimi termini del secondo, è una quantità intera, dovrà essere una quantità intera anche $\frac{R}{D}$, o sia R dovrà essere divisibile esattamente per D.

Reciprocamente ogni divisore comune alle quantità B ed R dee dividere A. Perciocchè facendo $\frac{B}{D} = b$, $\frac{R}{D} = r$, l'equazione $\frac{A}{D} = \frac{BQ}{D} + \frac{R}{D}$ diverrà

$$\frac{A}{D} = bQ + r;$$

ora dalla forma di questa equazione risulta che A dev' essere necessariamente divisibile per D, quando b ed r sono quantità intere.

Dietro questi princìpi *si comincerà*, come nell' Aritmetica, *dal cercare se una delle quantità sia essa stessa divisore dell' altra; se la divisione non succede esattamente, si dividerà il primo divisore pel residuo, e così di seguito; quello dei residui che dividerà esattamente il precedente, sarà il massimo comun divisore delle due quantità proposte*; ma bisognerà procedere nelle divisioni suddette con quelle avvertenze che la natura delle quantità algebriche richiede.

Primieramente la ricerca del comun divisore di due espressioni algebriche non dee intraprendersi che quando esse hanno lettere comuni; in questo caso è d' uopo sceglierne una, per rapporto alla quale si ordineranno le espressioni proposte, e si prenderà per dividendo quella in cui questa lettera avrà il maggiore esponente; l' altra sarà il divisore.

Siano le due quantità

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$
$$4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

le quali sono già ordinate per la lettera a; si prenderà la prima per dividendo, e la seconda per divisore. Ora sin dal principio dell'operazione si presenta una difficoltà che mai s'incontra nei numeri, ed è che il primo termine del divisore non può dividere esattamente quello del dividendo, a cagione dei fattori 4 e b dell'uno, che non sono nell'altro. Ma la lettera b essendo comune a tutti i termini del divisore, senza esserlo a tutti quelli del dividendo, se ne deduce (40) che b è fattore del divisore, e non lo è del dividendo; ora ogni divisore comune a due quantità non può esser composto che dei fattori che sono comuni all'una e all'altra; dunque, se esiste un tal divisore fra le due quantità proposte, esso non può trovarsi che tra i fattori della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$ nella quale si cangia la quantità $4a^2b - 5ab^2 + b^3$ dopo di aver tolto in ciascun suo termine il fattore b: per tal modo la quistione si riduce a cercare il massimo comun divisore delle due quantità

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3,$$

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Inoltre come si è potuto togliere da una delle quantità proposte un fattore che non entrava punto nell'altra, così potrà introdursi in questa un nuovo fattore, purchè non sia fattore della prima. Con tale operazione il massimo comun divisore di queste quantità, il quale non è formato che dai fattori comuni ad entrambe, non verrà affatto alterato. Profitterò di questa osservazione e moltiplicherò la quantità $3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3$ per 4, che non è fattore della quantità $4a^2 - 5ab + b^2$, a fine di rendere possibile la divisione del primo termine dell'una pel primo termine dell'altra.

Avrò in questa maniera per dividendo la quantità

$$12a^3 - 12a^2b + 4ab^2 - 4b^3,$$

per divisore la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

ed il quoziente parziale sarà $3a$.

Moltiplicando il divisore per questo quoziente, e sottraendo il prodotto dal dividendo, si avrà per residuo

$$3a^2b + ab^2 - 4b^3,$$

quantità, che in virtù del principio stabilito nel cominciamento di quest'articolo, dee anche avere con $4a^2 - 5ab + b^2$ lo stesso massimo comun divisore che la prima.

Avvalendomi delle osservazioni fatte qui sopra, rigetto il fattore b, comune a tutti i termini dell'ottenuto residuo, e dopo moltiplico esso residuo per 4, onde render possibile la divisione del suo primo termine per quello del divisore. Ho allora per dividendo la quantità

$$12a^2 + 4ab - 16b^2,$$

e per divisore la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2;$$

il quoziente parziale è 3.

Moltiplicando il divisore pel quoziente, e sottraendo il prodotto dal dividendo, si ottiene per residuo

$$19ab - 19b^2;$$

e la questione è ridotta a cercare il massimo comun divisore tra questa quantità e l'altra

$$4a^2 - 5ab + b^2.$$

Ma la lettera a, per rapporto alla quale si fa la divisione, non trovandosi più nel residuo che al primo grado, mentre essa è al secondo nel divisore, quest'ultimo è quello che bisogna prendere per dividendo, e il residuo passerà a divisore.

Prima di cominciare questa nuova divisione rigetto nel divisore $19ab - 19b^2$ il fattore $19b$ comune a tutti i suoi termini, il quale non è fattore del dividendo; ho dunque per dividendo la quantità

$$4a^2 - 5ab + b^2,$$

e per divisore

$$a - b.$$

Facendo la divisione, questa succede esattamente; dunque $a - b$ è il massimo comun divisore richiesto.

Risalendo dall'ultima divisione fino alla prima, si dimostrerebbe *a posteriori* che la quantità $a - b$ dee dividere esattamente le due quantità proposte, e che la medesima dev'essere la più composta di tutte quelle che le posson dividere. Ora dividendo per $a - b$ le due quantità proposte

$$3a^3 - 3a^2b + ab^2 - b^3, \qquad 4a^2b - 5ab^2 + b^3,$$

esse verranno scomposte come segue:

$$(3a^2+b^2)(a-b), \qquad (4ab-b^2)(a-b).$$

49. Allorchè la quantità che si prende per divisore contiene più termini in cui la lettera per rapporto alla quale si è ordinato trovasi al medesimo grado, senza una particolare avvertenza l'operazione non avrebbe mai fine. La ricerca del massimo comun divisore delle quantità

$$a^2b+ac^2-d^3, \qquad ab-ac+d^2$$

ne porgerà un esempio.

Preparando l'operazione come per una divisione ordinaria

$$\begin{array}{r|l} a^2b+ac^2-d^3 & ab-ac+d^2 \\ \hline -a^2b+a^2c-ad^2 & a \\ \hline \text{resto} \quad a^2c+ac^2-ad^2-d^3, & \end{array}$$

e dividendo a^2b per ab, si trova per quoziente a; moltiplicando il divisore per questo quoziente, e sottraendo i prodotti dal dividendo, il residuo conterrà un nuovo termine, ove a sarà al secondo grado, cioè, il termine a^2c proveniente dal prodotto di $+ac$ per a. L'operazione intanto non avrà fatto di questa maniera alcun progresso; poichè prendendo il residuo $a^2c+ac^2+ad^2+d^3$ per dividendo, e moltiplicandolo per b, onde render possibile la divisione per ab, si avrà

$$\begin{array}{r|l} a^2bc+abc^2-abd^2-bd^3 & ab-ac+d^2 \\ \hline -a^2bc+a^2c^2-acd^2 & ac \\ \hline \text{resto} \quad a^2c^2+abc^2-acd^2-abd^2-bd^3, & \end{array}$$

ed il termine $-ac$ riprodurrà di nuovo un termine a^2c^2, in cui a sarà pure al secondo grado; e così sempre.

Per evitare questo inconveniente, si rifletta che i termini del divisore possono essere ridotti a due soli colla risoluzione del binomio $ab-ac$ nei suoi fattori; così il divisore $ab-ac+d^2$ diventa $=a(b-c)+d^2$; e ponendo per brevità di calcolo $b-c=m$, si avrà per divisore $am+d^2$; ma allora bisognerà moltiplicare tutto il dividendo $a^2b+ac^2-d^3$ pel fattore m, ad oggetto di avere un nuovo dividendo, il cui primo termine sia divisibile per la quantità am che forma il primo

termine del divisore: l'operazione, fatta da capo, diventerà

$$\begin{array}{r|l} a^2bm + ac^2m - d^3m & am + d^2 \\ -a^2bm - abd^2 & \overline{ab + c^2} \\ \hline \text{1.° resto } -abd^2 + ac^2m - d^3m & \\ -ac^2m - c^2d^2 & \\ \hline \text{2.° resto } -abd^2 - c^2d^2 - d^3m. & \end{array}$$

Questa volta i termini affetti da a^2 sono spariti dal dividendo, e non vi sono rimasti che i termini affetti dalla prima potenza di a. Per mandar via anche questi, si dividerà prima il termine ac^2m per am, e verrà per quoziente c^2; moltiplicando il divisore pel quoziente, e sottraendo i prodotti dal dividendo, si avrà il 2.° resto; poi assumendo questo 2.° resto per un nuovo dividendo, si ommetterà in esso il fattoro d^2, che non è fattore del divisore; otterrassi così la quantità

$$-ab - c^2 - dm,$$

la quale si moltiplicherà di nuovo per m, e si avrà

$$\begin{array}{r|l} -abm - c^2m - dm^2 & am + d^2 \\ +abm + bd^2 & \overline{-b} \\ \hline \text{resto } \quad +bd^2 - c^2m - dm^2. & \end{array}$$

Il residuo $bd^2 - c^2m - dm^2$ di questa ultima divisione non contiene più a; se dunque esiste un divisore comune tra le due proposte quantità, esso dovrà essere del tutto indipendente dalla lettera a.

Giunta la cosa a tal punto, non può la divisione continuarsi più per rapporto alla lettera a; ma si osserverà che se esiste un comun divisore indipendente da a tra le quantità $bd^2 - c^2m - dm^2$ ed $am + d^2$, bisogna che esso divida separatamente le due parti am e d^2 del divisore; poichè, in generale, se una quantità è ordinata per le potenze della lettera a, ogni divisore di questa quantità, indipendente da a, deve dividere separatamente le quantità che moltiplicano le diverse potenze di cotesta lettera.

Per convincersene, basterà fare attenzione che in questo caso ciascuna delle quantità proposte dev'essere il prodotto di una quantità dipendente da a, e del divisore comune che n'è

8

indipendente. Ora se, per esempio, si ha l' espressione

$$Aa^4 + Ba^3 + Ca^2 + Da + E,$$

nella quale le lettere A, B, C, D, E rappresentano quantità qualunque indipendenti da a, e questa espressione si moltiplica per una quantità M anche indipendente da a, il prodotto

$$MAa^4 + MBa^3 + MCa^2 + MDa + ME,$$

ordinato per rapporto ad a, conterrà pure come prima le medesime potenze di a; ma il coefficiente di ciascuna di queste potenze sarà un multiplo di M.

Ciò posto, rimettendo in luogo di m la quantità $b-c$ da tale lettera rappresentata, si avranno le quantità

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2,$$
$$a(b-c) + d^2;$$

ora si vede ad occhio che $b-c$ e d^2 non hanno alcun fattore comune; dunque neppure le due quantità proposte hanno un divisore comune.

Se non si fosse potuto conoscere colla semplice ispezione oculare che non esisteva alcun divisore comune tra $b-c$ e d^2, sarebbe stato necessario cercare il loro massimo comun divisore, ordinandole per rapporto ad una medesima lettera, e poi assicurarsi se tal divisore divideva altresì la quantità

$$bd^2 - c^2(b-c) - d(b-c)^2.$$

50. In vece di differire alla fine dell' operazione l'indagine del massimo comun divisore indipendente dalla lettera per la quale le due quantità sono state ordinate, riesce più comodo di cercarlo in principio, perchè il più delle volte i residui provenienti da ciascuna operazione parziale si complicano a misura che si progredisce, ed il calcolo diviene di più in più laborioso.

Siano, a cagion d' esempio, le quantità

$$a^4b^2 + a^3b^3 + b^4c^2 - a^4c^2 - a^3bc^2 - b^2c^4,$$
$$a^2b + ab^2 + b^3 - a^2c - abc - b^2c,$$

delle quali si cerca il massimo comun divisore. Dopo di averle ordinate per la lettera a, il che produce

$$(b^2 - c^2)a^4 + (b^3 - bc^2)a^3 + b^4c^2 - b^2c^4,$$
$$(b-c)a^2 + (b^2 - bc)a + b^3 - b^2c,$$

osservo dapprima che se esse hanno un divisore comune che sia indipendente da a, bisogna che questo divida in particolare ciascuna delle quantità che moltiplicano le diverse potenze di a (49), ed ancora le quantità $b4c^2 - b^2c4$ e $b^3 - b^2c$, che non racchiudono questa lettera.

La quistione è dunque ridotta a trovare i comuni divisori delle quantità $b^2 - c^2$ e $b - c$, ed a verificare in seguito se tra questi divisori ve ne siano alcuni che possano dividere nel tempo stesso

$$b^3 - bc^2 \quad \text{e} \quad b^2 - bc, \qquad b4c^2 - b^2c^4 \quad \text{e} \quad b^3 - b^2c.$$

Ora dividendo $b^2 - c^2$ per $b - c$, si trova un quoziente esatto $b + c$; dunque $b - c$ è divisore comune delle quantità $b^2 - c^2$ e $b - c$, le quali palesemente non possono averne altri, perciocchè la quantità $b - c$ non è divisibile che per sè stessa e per l'unità. Adunque altro non resta che accertarsi se mai $b - c$ divida le altre quantità riportate qui sopra, o pure se divida ad un tempo le due quantità proposte, il che torna lo stesso; ciò accade di fatto, e si ottiene

$$(b + c)\, a^4 + (b^2 + bc)\, a^3 + b^3c^2 + b^2c^3,$$
$$a^2 + ba + b^2.$$

Per ridurre queste ultime espressioni al maggior grado possibile di semplicità, giova tentare se mai la prima di esse sia divisibile per $b + c$, che manifestamente non è fattore della seconda; ora tal divisione venendo eseguita, riesce; e così non avrà più a cercarsi che il massimo comun divisore delle due semplicissime quantità

$$a^4 + ba^3 + b^2c^2,$$
$$a^2 + ba + b^2.$$

Operando sopra queste quantità a norma delle regole stabilite, dopo la seconda divisione si giungerà ad un residuo che conterrà la lettera a alla prima potenza solamente; e siccome questo residuo non è comun divisore, se ne dedurrà che la lettera a non fa parte del massimo comun divisore cercato, il quale per conseguenza non è composto che dal solo fattore $b - c$.

Che se oltre a questo comun divisore ne fosse stato trovato un altro che avesse contenuto la lettera a, allora, per ottenere il massimo comun divisore richiesto, sarebbe stato necessario moltiplicare tra loro questi due divisori.

Del resto, acquistata che si sarà una qualche attitudine nell'analisi, le precedenti osservazioni saranno bastanti per rin-

venire in tutti i casi il massimo comun divisore; e si troverà facilmente che le quantità

$$6a^5 + 15a^4b - 4a^3c^2 - 10a^2bc^2,$$
$$9a^3b - 27a^2bc - 6abc^2 + 18bc^3$$

hanno per massimo comun divisore la quantità $3a^2 - 2c^2$.

51. Le quattro *operazioni fondamentali*, cioè a dire l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione e la divisione, si eseguono sopra le frazioni algebriche nel modo stesso che sulle frazioni aritmetiche, avvertendo solo di conformarsi, nelle operazioni prescritte dalle regole dell'Aritmetica, a quanto è stato di già insegnato intorno al calcolo delle quantità algebriche. Mi limiterò qui dunque a richiamare alla memoria siffatte regole, dando dell'applicazione di ciascheduna di esse un esempio.

La somma delle frazioni

$$\frac{a}{d}, \quad \frac{b}{d}, \quad \frac{c}{d},$$

le quali hanno il medesimo denominatore, cioè la quantità

$$\frac{a}{d} + \frac{b}{d} + \frac{c}{d} = \frac{a+b+c}{d} \quad (\textit{Aritm. } 65).$$

La differenza delle frazioni

$$\frac{a}{d} \quad \text{e} \quad \frac{b}{d},$$

che hanno il medesimo denominatore, ovvero la quantità

$$\frac{a}{d} - \frac{b}{d} = \frac{a-b}{d}.$$

La quantità intera a aggiunta alla frazione $\frac{b}{c}$, ovvero l'espressione

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c} \quad (\textit{Aritm. } 67).$$

Così pure l'espressione

$$a - \frac{b}{c} = \frac{ac}{c} - \frac{b}{c} = \frac{ac-b}{c}.$$

Reciprocamente

l'espressione $\frac{ac+b}{c}=\frac{ac}{c}+\frac{b}{c}=a+\frac{b}{c}$,

e l'espressione $\frac{ac-b}{c}=\frac{ac}{c}-\frac{b}{c}=a-\frac{b}{c}$ (*Aritm.* 66).

52. Le frazioni $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$, essendo ridotte al medesimo denominatore, diventano respettivamente

$$\frac{ad}{bd},\quad \frac{bc}{bd}\quad (\textit{Aritm. } 68).$$

Quando le frazioni proposte sono uguali, dev'essere $ad=bc$; allora dividendo i due membri per cd e chiamando q il quoziente, verrà

$$\frac{ad}{cd}=\frac{a}{c}=q,\ \frac{bc}{cd}=\frac{b}{d}=q,\ \text{e di qui } a=cq,\ b=dq;$$

dunque in tale circostanza i due termini d'una delle frazioni non sono che quelli dell'altra moltiplicati per un fattore comune

Le frazioni

$$\frac{a}{b},\quad \frac{c}{d},\quad \frac{e}{f},\quad \frac{g}{h},$$

mediante la stessa riduzione, assumono respettivamente la forma

$$\frac{adfh}{bdfh},\quad \frac{cbfh}{bdfh},\quad \frac{ebdh}{bdfh},\quad \frac{gbdf}{bdfh}\quad (\textit{Aritm. } 69).$$

Nel numero 69 dell'Aritmetica ho dato un metodo per ottenere in certi casi un denominatore più semplice di quello che risulta dalla regola generale; i simboli algebrici ne facilitano di molto l'applicazione, come or ora si vedrà.

Siano, per esempio, le due frazioni $\frac{a}{bc}$, $\frac{d}{bf}$ da ridursi alla medesima denominazione. Egli è chiaro che i due denominatori sarebbero gli stessi, se fosse f fattore del primo, e c fattore del secondo. Si moltiplicheranno adunque i due termini della prima frazione per f, e i due termini della seconda per c, e si otterranno le frazioni $\frac{af}{bcf}$ e $\frac{cd}{bcf}$, più semplici delle due $\frac{abf}{bbcf}$ e $\frac{bcd}{bbcf}$, che si sarebbero avute moltiplicando am-

bi i termini di ciascuna delle frazioni proposte pel denominatore dell' altra.

In generale, *per comporre il denominatore comune, si riuniranno in un solo prodotto tutti i fattori primi differenti dei denominatori delle frazioni proposte, innalzati alla più alta delle potenze che in tali denominatori si trovano avere respettivamente; indi si completerà l'operazione col moltiplicare il numeratore di ciascuna frazione pei fattori di tal prodotto, che mancano nel denominatore della frazione.*

Avendo, a cagion d'esempio, le frazioni $\frac{a}{b^2c}$, $\frac{d}{bf}$, $\frac{e}{cg}$,

formo il prodotto b^2cfg; poi moltiplico il numeratore della prima frazione per fg, quello della seconda per bcg, quello della terza per b^2f, ed ottengo

$$\frac{afg}{b^2cfg},\ \frac{bcdg}{b^2cfg},\ \frac{b^2ef}{b^2cfg}.$$

53. Per la moltiplicazione si ha

$$\frac{a}{b}\times c=\frac{ac}{b}\quad (Aritm.\ 53),$$

$$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}\quad (Aritm.\ 76).$$

Per la divisione,

$\frac{a}{b}$ da dividersi per c, dà $\frac{a}{bc}$, ovvero $\frac{a}{b}\times\frac{1}{c}$ (*Aritm.* 54, 76);

$\frac{a}{b}$ da dividersi per $\frac{c}{d}$, produce $\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ (*Aritm.* 79).

I termini delle frazioni precedenti erano monomî; ma se si avessero frazioni i cui termini fossero polinomî, allora non dovrebbero che eseguirsi, col mezzo delle regole date per le quantità complesse, le operazioni indicate sopra i monomî; procedendo in tal guisa si otterrà

$$\frac{a^2+b^2}{c+d}\times\frac{a-b}{c-d}=\frac{(a^2+b^2)(a-b)}{(c+d)(c-d)}$$

$$=\frac{a^3+ab^2-a^2b-b^3}{c^2-d^2}.$$

Il quoziente della frazione

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \text{ divisa per } \frac{a-b}{c-d}$$

è

$$\frac{a^2+b^2}{c+d} \times \frac{c-d}{a-b} = \frac{(a^2+b^2)(c-d)}{(c+d)(a-b)}$$

$$= \frac{a^2c+b^2c-a^2d-b^2d}{ac+ad-bc-bd};$$

e lo stesso si pratichi nelle altre operazioni.

54. Possedendo bene tutto ciò che precede, si è nello stato di risolvere agevolmente qualunque equazione di primo grado, per complicata che sia.

Se si avesse, per modo d' esempio, l' equazione

$$\frac{(a+b)(x-c)}{a-b} + 4b = 2x - \frac{ac}{3a+b},$$

si comincerebbe dal far sparire i denominatori, indicando solamente le operazioni; e così verrebbe

$$(a+b)(x-c)(3a+b) + 4b\ (a-b)(3a+b)$$
$$= 2x\ (a-b)(3a+b) - ac\ (a-b);$$

poi, eseguendo le moltiplicazioni, si troverebbe

$$3a^2x + 4abx + b^2x - 3a^2c - 4abc - b^2c$$
$$+ 12a^2b - 8ab^2 - 4b^3 =$$
$$6a^2x - 4abx - 2b^2x - a^2c + abc:$$

e trasportando in un sol membro tutti i termini affetti da x, si otterrebbe

$$-3a^2x + 8abx + 3b^2x$$

$$= 2a^2c + 5abc + b^2c - 12a^2b + 8ab^2 + 4b^3,$$

da cui in fine si conchiuderebbe

$$x = \frac{2a^2c+5abc+b^2c-12a^2b+8ab^2+4b^3}{-3a^2+8ab+3b^2}.$$

Dei problemi a due incognite, e delle quantità negative.

55. Nelle quistioni precedentemente risolute non si è adoperata che una sola incognita, e col di lei mezzo, e coll' ajuto insieme delle quantità cognite si sono espresse tutte le condizioni della quistione. Pure per taluni di cotesti problemi spesse volte riesce più comodo valersi di due incognite; ma allora vi hanno ad essere, esplicitamente o implicitamente, due condizioni, per formare due equazioni, senza le quali non si potrebbero nel tempo stesso determinare le due incognite.

La quistione del numero 3, massime come sta enunciata nel numero 4, si presenta naturalmente con due incognite; le quali incognite sono appunto i due numeri cercati. In fatti, se si denota

il più piccolo con x,
il più grande con y,
la loro somma con a,
la loro differenza con b,

avrassi, giusta l' enunciato del problema,

$$x+y=a,$$
$$y-x=b.$$

Ora ciascuna di queste due equazioni, considerata sola e come indipendente dall' altra, non può assolutamente determinare una delle incognite. Se, per esempio, si ricava il valore di y dalla seconda, essa darà

$$y=b+x,$$

valore che a prima giunta sembra nulla mostrare di ciò che si cerca, perciocchè contiene la quantità x, che non è data; ma se questo valore, il quale rappresenta la incognita y, si pone in luogo di essa y nella prima equazione, questa non contenendo più allora che la sola incognita x, ne darà il valore pei metodi già insegnati.

Ed in verità, per virtù di tale sostituzione, avrassi

$$x+b+x=a,$$

ovvero $$2x+b=a,$$

o finalmente $$x=\frac{a-b}{2};$$

e mettendo questo valore di x in quello di y, il quale è $b+x$,

si otterrà

$$y = b + x = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}:$$

dunque pei due numeri incogniti si sono conseguite in altra guisa le medesime espressioni che nel numero 3.

Agevol cosa egli è pertanto il vedere che la soluzione di sopra non differisce punto, in quanto alla sostanza, da quella del numero 3; solamente ho piantata e risoluta la seconda equazione $y - x = b$, ch' io m' era contentato di enunciare in linguaggio ordinario nel numero citato, e da cui aveva conchiuso, senza calcolo algebrico, che il numero maggiore era $x + b$.

56. Sia inoltre la quistione:

Un operajo lavorando presso un particolare per lo spazio di 12 giorni, ed avendo avuto seco nei primi 7 giorni sua moglie e suo figlio, ha ricevuto per tutti 74 franchi; ha lavorato in seguito presso il medesimo particolare 8 altri giorni, per 5 dei quali ha avuto seco sua moglie e suo figlio, ed ha ricevuto per questo tempo 50 franchi. Si domanda quanto guadagnava esso al giorno di sua parte, e quanto guadagnavano insieme nel medesimo tempo sua moglie e suo figlio.

Dicasi x il guadagno giornaliero del marito,

y quello della moglie e del figlio;

12 giorni d' opera del marito produrranno franchi $12x$,

7 della moglie e del figlio importeranno $7y$;

dunque per la prima circostanza del problema si avrà

$$12x + 7y = 74:$$

8 giorni d'opera del marito produrranno $8x$,

5 della moglie e del figlio importeranno $5y$;

dunque per la seconda circostanza del problema dovrà essere

$$8x + 5y = 50.$$

E ragionando qui come nella quistione precedente, si prenderà il valore di y dalla prima equazione, e si otterrà

$$y = \frac{74 - 12x}{7};$$

poi si porrà questo valore nella seconda dopo averlo molti-

plicato per 5, perchè vi è $5y$, e verrà

$$8x + \frac{370 - 00x}{7} = 50,$$

equazione la quale non contiene che la sola incognita x.

Risolvendo questa equazione, si avrà successivamente

$$56x + 370 - 60x = 350,$$
$$370 - 4x = 350;$$

e trasportando $-4x$ nel secondo membro, e 350 nel primo, si otterrà

$$370 - 350 = 4x$$
$$20 = 4x$$
$$\frac{20}{4} = x$$
$$5 = x.$$

Ora che si conosce x, perchè si è trovato eguale a 5, se si pone questo suo valore nella formola

$$y = \frac{74 - 12x}{7},$$

il secondo membro diverrà cognito, e si avrà

$$y = \frac{74 - 12 \times 5}{7} = \frac{74 - 60}{7} = \frac{14}{7} = 2:$$

laonde $y = 2$.

Il marito adunque guadagnava 5 franchi al giorno, mentre la moglie ed il figlio insieme non ne guadagnavano che 2.

57. Il lettore avrà forse osservato che risolvendo più sopra l'equazione $370 - 4x = 350$, ho trasportato il termine $-4x$ dal primo nel secondo membro: mi sono comportato così per evitare una lieve difficoltà che avrebbe avuto luogo senza di questo, e della quale passo a dare la spiegazione.

Lasciando $-4x$ nel primo membro, e trasportando 370 nel secondo, si avrebbe

$$-4x = 350 - 370;$$

e riducendo il secondo membro conformemente alla regola del

numero 19, ne sarebbe risultato

$$-4x=-20.$$

Ma poichè si è evitato nel numero precedente il segno — dal quale era affetta la quantità $4x$, trasportando questa quantità nell'altro membro; poichè parimente la quantità $350-370$ è divenuta $370-350$ cangiando di membro; e finalmente poichè una quantità passando così da un membro all'altro cangia di segno (10), è evidente potersi giungere ai medesimi risultamenti mutando immediatamente i segni delle quantità $-4x$, $+350$ e -370, il che darà

$$4x=-350+370,$$

ovvero

$$4x=370-350,$$

equazione che in tutto è la stessa cosa che

$$370-350=4x.$$

Anzi può farsi il cangiamento di segno a dirittura sopra l'ultimo risultamento

$$-4x=-20;$$

e viene allora, come sopra,

$$4x=20.$$

Di qui è che *tutte le quantità affette dall'incognita potranno trasportarsi indifferentemente nell'uno o nell'altro membro; avvertendo solo di mutare nel tempo stesso tutti i segni in entrambi i membri dell'ultimo risultamento, qualora l'incognita verrà affetta dal segno —.*

58. Prima d'intraprendere col mezzo delle lettere la risoluzione generale del problema del numero 56, piacemi esaminare un altro caso particolare. Suppongo che la prima somma ricevuta dall'operajo sia di 46 franchi, e la seconda di 30 franchi, le altre circostanze restando per altro le stesse; le equazioni del problema saranno in tale supposto

$$12x+7y=46,$$
$$8x+5y=30.$$

La prima dà

$$y=\frac{46-12x}{7};$$

moltiplicando questo valore per 5 per mettere il risultamento in luogo di $5y$ nella seconda, si avrà

$$8x+\frac{230-60x}{7}=30;$$

facendo sparire i denominatori, si otterrà

$$56x+230-60x=210,$$

ovvero $$56x-60x=210-230,$$

o pure $$-4x=-20;$$

e cangiando i segni dei due membri, secondo l' osservazione del numero precedente, troverassi infine

$$4x=20,$$

$$x=\frac{20}{4}=5.$$

Se ora nell' espressione di y si sostituisce in vece di x il di lui valore 5, verrà

$$y=\frac{46-60}{7};$$

e riducendo il numeratore del valore di y, emergerà

$$y=\frac{-14}{7}.$$

Frattanto come dovrà egli mai interpetrarsi il segno — da cui è affetta la quantità isolata 14? Ben si comprende ciò che significa il complesso di due quantità separate dal segno —, allorchè la quantità da sottrarre è minore di quella da cui deo sottrarsi; ma da qual cosa può mai sottrarsi una quantità che non è unita a verun' altra nel membro ove si trova? Per illustrare questa specie di paradosso, il miglior mezzo che si presenta, è quello di risalire alle equazioni stesse che esprimono le condizioni del problema; conciossiachè stando così più da presso al suo enunciato, vi si potranno meglio leggere le circostanze che hanno dato luogo all'attuale difficoltà.

Riprendo adunque l' equazione

$$12x+7y=46,$$

pongo in luogo di x il di lui valore 5, e viene

$$60+7y=46.$$

Ora guardando solamento questa equazione, vi si scorge un assurdo. In fatti non è possibile formare il numero 46 aggiungendo una quantità al numero 60, che solo già sorpassa 46.

Prendo pure la seconda equazione

$$8x + 5y = 30,$$

e ponendovi 5 in luogo di x, trovo

$$40 + 5y = 30;$$

e questa equazione rinchiude il medesimo assurdo dianzi incontrato, giacchè converrebbe che il numero 30 potesse formarsi aggiungendo una quantità al numero 40.

Ora le quantità $12x$ ovvero 60 nella prima equazione, $8x$ ovvero 40 nella seconda, esprimono ciò che guadagna l'operajo col suo solo lavoro; le quantità $7y$ e $5y$ rappresentano i guadagni attribuiti a sua moglie insieme ed a suo figlio; mentre i numeri 46 e 30 denotano la somma data pel salario cumulato di questo tre persone: è da vedere presentemente con accuratezza in che consista l'assurdo.

Si osservi che giusta l'enunciato l'operajo guadagnerebbe più da se solo di quel che non faccia ajutato dalla moglie e dal figlio; è dunque impossibile di considerare il danaro attribuito al lavoro della moglie e del figlio come un aumento al salario di quest'operajo.

Ma se in vece di prendere il danaro attribuito alla moglie insieme ed al figlio come un guadagno, si riguardasse come una spesa fatta da essi a carico dell'operajo, allora bisognerebbe togliere questo danaro da quello guadagnato dal solo marito, e non vi sarebbe più contraddizione alcuna nelle equazioni, perchè esse diverrebbero

$$60 - 7y = 46,$$

$$40 - 5y = 30.$$

Si ricaverebbe sì dall'una che dall'altra

$$y = 2;$$

e quindi si conchiuderebbe che se l'operajo guadagna 5 fr. al giorno, la moglie unita al figlio gli cagionano una spesa di 2 fr.; il che può d'altronde verificarsi nel modo seguente.

Per 12 giorni di lavoro l'operajo guadagna

$$5^{\text{fr.}} \times 12 \quad \text{ovvero} \quad 60^{\text{fr.}};$$

la spesa cagionatagli da sua moglie e da suo figlio per lo spazio di 7 giorni è di

$$2^{\text{fr.}} \times 7 \quad \text{ovvero} \quad 14^{\text{fr.}}:$$

restano dunque all'operajo 46 fr.

Per 8 giorni di lavoro l'operajo guadagna

$$5^{fr.} \times 8 \text{ ovvero } 40^{fr.};$$

la spesa di sua moglie e di suo figlio per 5 giorni è di

$$2^{fr.} \times 5 \text{ ovvero } 10^{fr.}:$$

restano dunque all' operajo 30 fr.

Presentemente è cosa ben chiara che all'enunciato del numero 56, perchè il problema proposto sia possibile coi dati precedenti, conviene sostituire quest' altro :

Un operajo lavorando presso un particolare per 12 giorni, ed avendo avuto seco nei primi 7 giorni sua moglie e suo figlio, che gli cagionavano una spesa, ha ricevuto 46 franchi; ha lavorato in seguito altri 8 giorni, per 5 dei quali aveva con sè sua moglie e suo figlio, i quali gli cagionavano ancora la medesima spesa, ed ha ricevuto 30 franchi. Si domanda quanto guadagnava al giorno, e quanto spendeva nel medesimo tempo per sua moglie insieme e suo figlio.

Chiamando x il guadagno giornaliero dell'operajo, ed y la spesa cagionatagli dalla moglie e dal figlio in ciascun giorno, le equazioni del problema saranno evidentemente

$$12x - 7y = 46,$$

$$8x - 5y = 30,$$

le quali venendo risolute come quelle del numero 56, daranno

$$x = 5^{fr.}, \quad y = 2^{fr.}$$

59. In tutti i casi nei quali si troverà pel valore dell'incognita un numero affetto dal segno —, potrà aggiustarsi l'enunciato del problema in una maniera analoga alla precedente, esaminando con accuratezza qual sia la quantità che, da additiva che essa era nel primo enunciato, dee diventar sottrattiva nel secondo ; ma l' Algebra ci dispensa da qualunque ricerca su questo soggetto, qualora si saprà convenevolmente operare sopra le espressioni affette dal segno — ; imperocchè queste espressioni essendo dedotte dalle equazioni del problema, deggiono *soddisfare* a queste equazioni: vale a dire che sottoponendole alle operazioni indicate nelle equazioni, si deve trovare pel primo

membro un valore eguale a quello del secondo. Così l'espressione $\frac{-14}{7}$ cavata dalle equazioni

$$12x + 7y = 46,$$
$$8x + 5y = 30$$

deve unitamente al valore $x = 5$ dedotto dalle equazioni medesime, verificarle entrambe.

La sostituzione del valore di x dà a prima giunta

$$60 + 7y = 46,$$
$$40 + 5y = 30.$$

Rimane ora a fare la sostituzione di $\frac{-14}{7}$ in luogo di y; e a tale oggetto conviene moltiplicare questa espressione per 7 e per 5, avendo riguardo al segno $-$ da cui la medesima si trova affetta.

Se vi si applica la regola dei segni data nel numero 42 per la divisione, avrassi

$$\frac{-14}{7} = -2;$$

poi per la regola dei segni relativa alla moltiplicazione si otterrà

$$7 \times -2 = -14,$$
$$5 \times -2 = -10.$$

Le equazioni

$$60 + 7y = 46 \quad \text{e} \quad 40 + 5y = 30,$$

divenendo respettivamente

$$60 - 14 = 46 \quad \text{e} \quad 40 - 10 = 30,$$

si troveranno verificate, non già sommando le due parti del primo membro, ma bensì sottraendo la seconda dalla prima, come si è fatto più sopra dietro la considerazione della forma di coteste equazioni.

60. Siccome i dati del problema del numero 58 non hanno permesso di risolverlo nel senso del primo enunciato, vale a

dire per addizione, o sia riguardando come un guadagno il danaro attribuito alla presenza della moglie e del figlio dell' operajo; così il secondo enunciato non converrebbe niente meglio ai dati del problema del numero 56.

In fatti se in questo caso si volesse considerare la y come esprimente una spesa, le equazioni

$$12x - 7y = 74,$$
$$8x - 5y = 50$$

che si avrebbero allora, darebbero

$$x = 5 \qquad \text{ed} \qquad y = \frac{-14}{7};$$

e la sostituzione del valore di x cangerebbe da prima queste equazioni in

$$60 - 7y = 74,$$
$$40 - 5y = 50.$$

Ora l'assurdità di questi risultamenti è precisamente contraria a quella dei risultamenti del numero 58, giacchè si tratta ora di essere giunti a residui maggiori dei numeri 60 e 40, dai quali si tolgono le quantità $7y$ e $5y$.

Pertanto il segno — dal quale è affetta l'espressione di y, non solo indica un assurdo, ma di più lo corregge; poichè secondo la regola dei segni

$$\frac{-14}{7} = -2$$

e

$$-7 \times -2 = +14,$$
$$-5 \times -2 = +10.$$

Con questo mezzo le equazioni

$$60 - 7y = 74, \qquad 40 - 5y = 50,$$

diventando

$$60 + 14 = 74, \qquad 40 + 10 = 50,$$

si verificano per addizione; ed in conseguenza le quantità $-7y$ e $-5y$, trasformate in $+14$, $+10$, in vece di esprimere spese a carico dell'operajo, son da riguardarsi come un guadagno per esso: si ricade adunque anche in questo caso sopra il vero enunciato della quistione.

61. Dai precedenti esempi chiaramente si apprende che *negli enunciati dei problemi di primo grado s' incontrano alle volte alcune contraddizioni, che l'Algebra fa non solamente conoscere, ma di cui accenna ancora la rettificazione, rendendo sottrattive certe quantità che eransi riguardate come additive, o additive certe quantità che eransi riguardate come sottrattive, e ciò col dare per le incognite valori affetti dal segno —.*

Ed ecco ciò che dee intendersi allorchè si dice comunemente che i valori affetti dal segno —, i quali si, chiamano *soluzioni negative*, risolvono in un senso opposto al di lei enunciato la quistione ove essi s' incontrano.

Quindi è che le quistioni i cui enunciati sono in guisa legati tra loro, che le soluzioni che soddisfano ad uno di tali enunciati, con un semplice cangiamento di segno soddisfanno anche all' altro, a parlar propriamente, riguardar si possono come un solo e medesimo problema.

62. Poichè le quantità negative risolvono in un certo senso i problemi da cui derivano, egli è a proposito di esaminare più da vicino l' uso di queste quantità, e primieramente di assicurarsi della maniera colla quale conviene eseguire le operazioni sopra di esse indicate.

Si è fatto uso qui sopra delle regole dei segni precedentemente trovate per ciascuna delle operazioni fondamentali; ma queste regole non sono state affatto dimostrate sopra quantità isolate. Nella sottrazione, a cagion d' esempio, si suppose che bisognava togliere da a l' espressione $b-c$, nella quale la quantità negativa $-c$ era preceduta da una quantità positiva b (20). Ora ben si potrebbe ridurre $b-c$ a $-c$, ponendo $b=0$, il che muterebbe quel risultamento in $a+c$; ma il ragionamento fatto nel luogo citato, supponendo l' esistenza della quantità b, non è rigorosamente applicabile a questo caso; e siccome la teoria delle quantità negative è una delle più importanti ed insieme delle più spinose dell' Algebra, interessa molto appoggiarla sopra salde basi. Per conseguire un tal fine, bisogna prender le mosse più da lontano, e risalire sino all' origine delle quantità negative.

La maggior sottrazione che può farsi da una quantità, è il toglierla da sè stessa; ed in siffatto caso si ha per residuo zero: così $a-a=0$. Ma allorchè la quantità da sottrarsi supera quella da cui dee sottrarsi, la sottrazione non può più eseguirsi per intero; ed altro non si fa che operare nella quantità da sottrarre una riduzione uguale alla quantità dalla quale essa dovrebbe esser sottratta. Quando da 3, per esempio, bisogna togliere 5, ovvero quando si ha la quantità $3-5$, to-

gliendo a prima giunta 3 da 5, viene a decomporsi il 5 nelle due parti 3 e 2 delle quali la successiva sottrazione equivale a quella di 5; e perciò in luogo di $3-5$ si ha l' espressione equivalente $3-3-2$ che si riduce a -2. Il segno — che precede il 2, dimostra che vi sarebbe stato bisogno di questa quantità, affinchè la sottrazione avesse potuto interamente farsi; di maniera che se si fosse aggiunto 2 alla prima delle quantità, si sarebbe ottenuto $3+2-5$, cioè zero. Si esprime dunque per mezzo dei segni algebrici l'idea da doversi annettere alla quantità negativa $-a$, formando l'equazione $a-a=0$, o sia riguardando i simboli $a-a$, $b-b$, ec. come equivalenti a zero.

Ciò posto, ben si comprende che unendo alla quantità qualunque a il simbolo $b-b$, che in sostanza non è altro che zero, non si cangerà punto il valore di questa quantità, e che in conseguenza l' espressione $a+b-b$ non è che un' altra maniera di scrivere la quantità a; il che è per altro evidente, poichè i termini $+b$ e $-b$ si distruggono.

Ma avendo con tal cangiamento di forma fatto entrare nella composizione di a le quantità $+b$ e $-b$, egli è chiaro che per sottrarre una qualunque di queste quantità, basterà cancellarla. Se si vuol togliere $+b$ da a, si cancellerà $+b$, e resterà $a-b$, il che va d'accordo colla convenzione stabilita nel numero 2; che se al contrario si vorrà sottrarre $-b$, si cancellerà quest' ultima quantità, e resterà $a+b$, come si conchiuderebbe dal numero 20.

In quanto alla moltiplicazione si osserverà che il prodotto di $a-a$ per $+b$ dev' essere $ab-ab$, perchè il moltiplicando essendo uguale a zero, il prodotto devo pure essere zero; ed il primo termine essendo $+ab$, il secondo dee necessariamente essere $-ab$, per distruggere il primo.

Si conchiuderà da ciò che $-a$ moltiplicato per $+b$ deve dare $-ab$.

E moltiplicando a per $b-b$, avrassi pure $ab-ab$, perchè il moltiplicatore essendo uguale a zero, il prodotto sarà parimente uguale a zero; e bisognerà in conseguenza che il secondo termine sia $-ab$ per distruggere il primo $+ab$

Dunque $+a$ moltiplicato per $-b$ deve dare $-ab$.

Finalmente se si moltiplica $-a$ per $b-b$, il primo termine del prodotto dovendo essere, per ciò che precede, $-ab$, converrà che il secondo termine sia $+ab$, poichè il prodotto dev' esser nullo nel medesimo tempo che il moltiplicatore.

Dunque $-a$ moltiplicato per $-b$ deve dare $+ab$.

Ravvicinando questi risultamenti, se ne deducono le medesime regole che quelle del numero 31.

Il segno di un quoziente, combinato con quello del divisore, seguendo le regole proprie alla moltiplicazione, dovendo riprodurre il segno del dividendo, si conchiuderà dal già detto, che la regola dei segni, data nel numero 42, conviene ancora al caso presente, e che per conseguenza *le quantità monomie, quando sono isolate, si combinano, rispetto ai loro segni, come quando fan parte dei polinomi.*

63. Dietro queste osservazioni si potrà sempre, qualora s'incontreranno valori negativi, risalire al vero enunciato del problema risoluto, cercando in qual maniera questi valori soddisfacciano alle equazioni del problema proposto; e ciò verrà maggiormente confermato dall'esempio seguente, il quale si riferisce a numeri differenti nella specie da quelli considerati nella quistione del numero 56.

64. *Due corrieri, per andare all'incontro l'uno dell'altro, partono nel medesimo tempo da due città, la cui distanza è data; è noto quanti chilometri percorre ciascuno dei corrieri in un'ora, e si cerca a qual punto della strada che unisce le due città, questi corrieri s'incontreranno.*

Per rendere più evidenti le circostanze del problema, ho posto qui sotto una figura nella quale i punti indicati dalle lettere maiuscole A e B rappresentano i luoghi di partenza dei due corrieri.

A R B

Esprimerò al solito con lettere minuscole le quantità note e le quantità incognite del problema. E dirò

a la distanza dei punti di partenza A e B,

b il numero dei chilometri che percorre in un'ora il corriere partito dal punto A,

c il numero dei chilometri che percorre nello stesso tempo il corriere partito dal punto B.

Inoltre supponendo che la lettera R sia situata nel punto d'incontro dei due corrieri, chiamerò

x la lunghezza della strada AR percorsa dal primo,

y la lunghezza della strada BR percorsa dal secondo; e siccome

$$AR + BR = AB,$$

avrò l'equazione

$$x + y = a.$$

Considerando poi che gli spazi x ed y sono percorsi nel

medesimo tempo, si osserverà che il primo corriere, il quale fa un numero b di chilometri in un' ora di tempo, percorrerà lo spazio x in un tempo rappresentato da $\frac{x}{b}$.

Parimente il secondo corriere, che percorre un numero c di chilometri in un' ora, percorrerà lo spazio y in un tempo espresso da $\frac{y}{c}$: si avrà dunque

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

Le equazioni del problema saranno per conseguenza

$$x+y=a,$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}.$$

E facendo sparire il denominatore b dalla seconda, si avrà

$$x=\frac{by}{c};$$

ponendo questo valore di x nella prima equazione, essa diventerà

$$\frac{by}{c}+y=a,$$

e se ne conchiuderà

$$by+cy=ac, \text{ e quindi } y=\frac{ac}{b+c}.$$

Sostituendo poi il trovato valore di y in quello di x, otterrassi

$$x=\frac{b}{c}\times\frac{ac}{b+c}, \text{ ovvero } x=\frac{abc}{c(b+c)} \text{ (53)},$$

o finalmente

$$x=\frac{ab}{b+c} \text{ (38)}.$$

Poichè non entra alcun segno — nei valori di x e di y, è evidente che qualunque siano i numeri che si prendono in vece

delle lettere a, b, c, si troveranno sempre per x e per y due numeri affetti dal segno $+$, e che in conseguenza il problema proposto sarà sempre risoluto nel senso preciso del suo enunciato. In fatti si comprende facilmente che in tutti i casi in cui due corrieri vanno nel tempo stesso l'uno verso l'altro, debbano necessariamente incontrarsi.

65. Suppongo ora che i due corrieri vadano verso la stessa parte, in modo che quello che è partito dal punto A, corra dietro a quello che è partito dal punto B, andando verso un punto C, posto al di là del punto B, rispetto al punto A.

A B R C

È manifesto che in questa supposizione il corriere partito dal punto A non può raggiugnere il corriere partito dal punto B, a meno che non corra più veloce di quest'ultimo; e che il punto d'incontro R non è più tra A e B, ma al di là di B per rapporto ad A.

Conservando i medesimi dati di sopra, e avvertendo che allora

$$AR - BR = AB,$$

si avrà

$$x - y = a.$$

La seconda equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$$

non esprimendo che l'eguaglianza dei tempi impiegati dai corrieri nel percorrere gli spazi AR e BR, rimane la stessa.

Le due equazioni qui sopra, venendo risolute come le precedenti, danno

$$x = \frac{by}{c},$$

$$\frac{by}{c} - y = a, \qquad by - cy = ac,$$

$$y = \frac{ac}{b-c},$$

$$x = \frac{b}{c} \times \frac{ac}{b-c} = \frac{abc}{c(b-c)},$$

e finalmente

$$x = \frac{ab}{b-c}.$$

Qui i valori di x e di y saranno positivi sol quando si prenderà b maggiore di c, cioè a dire, quando si supporrà che il corriere partito dal punto A, vada con celerità maggiore dell' altro.

Se, per esempio, si suppone

$$b = 20, \qquad c = 10,$$

si ha

$$x = \frac{20a}{20-10} = \frac{20a}{10} = 2a,$$

$$y = \frac{10a}{20-10} = \frac{10a}{10} = a;$$

donde risulta che il punto d' incontro R è lontano dal punto A di due volte AB.

Se poi si suppone b minore di c, facendo per esempio,

$$b = 10, \qquad c = 20,$$

si trova

$$x = \frac{10a}{10-20} = \frac{10a}{-10} = -a,$$

$$y = \frac{20a}{10-20} = \frac{20a}{-10} = -2a.$$

Questi valori essendo affetti dal segno —, dimostrano che il problema non può più essere risoluto nel senso del suo enunciato; ed in fatti è assurdo il supporre che il corriere partito dal punto A, non percorrendo che 10 chilometri per ora, possa mai raggiungere il corriere partito dal punto B, il quale percorre 20 chilometri per ora, ed è avanti al primo.

66. Frattanto questi medesimi valori risolvono il problema in un certo senso; perciocchè sostituendoli nelle equazioni

$$x - y = a,$$

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

si ha, per le regole dei segni,

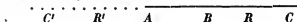
$$-a+2a=a,$$

$$-\frac{a}{10}=-\frac{2a}{20},$$

equazioni che sono soddisfatte, poichè effettuando le riduzioni che si presentano, il primo membro diventa eguale al secondo; e se si fa attenzione ai segni dei termini che compongono la prima, si vedrà in qual modo convenga modificare l'enunciato del problema per toglierne l'assurdo.

Di fatto lo spazio a corrispondente ad x e percorso dal primo corriere, è quello che veramente vien sottratto dallo spazio $2a$ corrispondente ad y e percorso dal secondo corriere; è dunque come se si fosse cangiato y in x e x in y, e come se si fosse supposto che il corriere partito dal punto B andasse dietro all'altro.

Questo cangiamento nell'enunciato ne produce uno nella direzione del corso dei due corrieri; essi non camminano più verso il punto C, ma dal lato opposto, verso il punto C', come lo mostra la seguente figura:

C' R' A B R C

ed il loro incontro succede in R'. Risulta da ciò

$$BR'-AR'=AB,$$

il che dà

$$y-x=a;$$

d'altronde si ha sempre

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c},$$

e si troverebbe

$$x=\frac{ab}{c-b}=\frac{10a}{20-10}=a,$$

$$y=\frac{ac}{c-b}=\frac{20a}{20-10}=2a:$$

valori positivi, i quali risolvono il problema nel senso preciso del di lui enunciato.

67. Questo problema presenta un caso nel quale è del tutto assurdo. Un tal caso ha luogo allorchè si suppone che i due corrieri camminino colla stessa velocità; è manifesto che da qualunque lato si facciano camminare, essi non possono mai incontrarsi, perciocchè conservano sempre tra loro la stessa distanza dei loro punti di partenza. Questo assurdo, che nessuna modificazione nell'enunciato può far disparire, si manifesta evidentemente nelle equazioni.

Si ha allora $b = c$, poichè i corrieri, andando colla stessa celerità, percorrono il medesimo spazio in un' ora; quindi l'equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

diventa

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{b},$$

e dà

$$x = y.$$

Perciò l'equazione $x - y = a$ si cangia in

$$x - x = a, \qquad \text{cioè in} \qquad 0 = a,$$

risultamento palesemente assurdo, poichè suppone nulla una quantità a la cui grandezza è data.

68. Cotesto assurdo si manifesta in una maniera molto singolare nei valori delle incognite

$$x = \frac{ab}{b-c}, \qquad y = \frac{ac}{b-c};$$

il loro denominatore $b - c$ divenendo 0 allorchè $b = c$, si ha

$$x = \frac{ab}{0}, \qquad y = \frac{ac}{0}.$$

Non si comprende tanto facilmente che possa essere il quoziente di una divisione, quando il divisore è zero; si vede solo che se si prendesse b pochissimo differente da c, i valori di x e di y diverrebbero grandissimi. Per convincersene, non

si ha a far altro che assumere

$$b = 6^{\text{chil.}}, \qquad c = 5^{\text{chil.}}, 8;$$

e si avrà

$$x = \frac{6a}{0,2} = 30a,$$

$$y = \frac{5,8a}{0,2} = 29a;$$

si passi in seguito a

$$b = 6, \qquad c = 5,9,$$

e si otterrà

$$x = \frac{6a}{0,1} = 60a,$$

$$y = \frac{5,9a}{0,1} = 59a;$$

facciasi ancora

$$b = 6, \qquad c = 5,99,$$

e verrà

$$x = \frac{6a}{0,01} = 600a,$$

$$y = \frac{5,99a}{0,01} = 599a;$$

e si vede facilmente che il divisore diminuendo a misura che si rende più piccola la differenza dei numeri b e c, si ottengono valori sempre maggiori.

Frattanto, siccome per quanto piccola che sia una quantità, essa non può essere giammai presa per zero, ne segue che per quanto si suppongano poco differenti tra loro i numeri rappresentati da b e da c, ed in conseguenza per quanto grandi fossero i valori risultanti di x e di y, giammai si giungerebbe a quelli che corrispondono al caso di $b = c$.

Questi ultimi non potendo essere rappresentati da alcun numero, per grande che si supponga, sono detti *infiniti;* ed ogni espressione della forma $\frac{m}{0}$, il cui denominatore è zero, è riguardata come il simbolo dell'*infinito*.

Questo esempio dimostra che l'*infinito* matematico è un' idea negativa, perciocchè non vi si perviene che per l'impossibilità di assegnare una grandezza che possa risolvere il problema.

Potrebbesi qui domandare come i valori

$$x=\frac{ab}{0}, \quad y=\frac{ac}{0}$$

soddisfanno alle equazioni proposte; perchè è una proprietà essenziale dell' Algebra che i simboli dei valori delle incognite, qualunque essi siano, venendo sottomessi alle operazioni indicate sopra queste incognite, debbano soddisfare alle equazioni del problema.

Sostituendoli nelle equazioni

$$x-y=a,$$

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b},$$

che corrispondono al caso in cui $b=c$, si ha per la prima

$$\frac{ab}{0}-\frac{ab}{0}=a,$$

ovvero $\frac{ab-ab}{0}=a$, o pure, $ab-ab=a\times 0$, o finalmente

$$0=0, \quad \text{poichè} \quad a\times 0=0.$$

La seconda equazione nella medesima circostanza dà

$$\frac{ab}{0\times b}=\frac{ab}{0\times b};$$

e così i due membri di ciascuna equazione divenendo eguali, queste equazioni sono soddisfatte.

Resta ancora a spiegare come la nozione indicata dall' espressione $\frac{ab}{0}$ corregga l'assurdo del risultamento trovato nel numero 67. A tal uopo si divideranno per x i due membri dell' equazione

$$x-y=a;$$

e si avrà

$$1-\frac{y}{x}=\frac{a}{x};$$

e siccome l'equazione

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}$$

dà $x=y$, la prima diverrà

$$1-1=\frac{a}{x}, \qquad \text{ossia} \qquad 0=\frac{a}{x}.$$

Qui l'errore consiste nella quantità $\frac{a}{x}$ di cui il secondo membro supera il primo; ma questo errore diverrà sempre più piccolo a misura che prenderassi per x un numero successivamente maggiore. Adunque con ragione l'Algebra dà per x un'espressione da non poter essere rappresentata da alcun numero, per grande che fosse, quale espressione però, venendo in seguito di quelle che rappresentano numeri di mano in mano più grandi, indica in qual senso possa diminuirsi sempre più l'errore della supposizione.

69. Se i corrieri, camminando con eguale velocità e per lo stesso verso, partissero dallo stesso punto, il loro incontro non succederebbe più in un punto particolare, perchè avrebbe luogo in tutta l'estensione del loro corso: ora giova vedere come questa circostanza venga rappresentata dai valori che prendono in questo caso le incognite x ed y.

B

A C

Il punto A ed il punto B essendo riuniti in un solo, si ha per tal caso $a=0$, e tuttavia $b=c$; adunque verrà

$$x=\frac{0\,.\,b}{0}=\frac{0}{0}, \qquad y=\frac{0\,.\,c}{0}=\frac{0}{0}.$$

Per interpetrare questi valori i quali indicano una divisione in cui il dividendo e il divisore sono ambidue nulli, risalgo alle equazioni del problema. La prima divenendo

$$x-y=0, \quad \text{dà} \quad x=y;$$

e sostituendo questo valore nella seconda equazione, che in questo caso è

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}, \qquad \text{no viene} \qquad \frac{y}{b}=\frac{y}{b}.$$

L'ultima equazione avendo i suoi due membri *identici*, cioè composti dei medesimi termini, presi col medesimo segno, è soddisfatta, qualunque sia il valore che diasi ad y, e però non potrebbe determinare questa incognita. Altronde è chiaro che l'equazione

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{b}, \quad \text{si riduce ad} \quad x=y,$$

e non esprime per conseguenza nulla di più che la prima (*). Risulta solamente dall'una e dall'altra, che i due corrieri saranno sempre insieme, poichè le distanze x ed y hanno ambedue principio nello stesso punto A, e sono eguali, i loro valori restando peraltro indeterminati. L'espressione $\frac{0}{0}$ è qui dunque il simbolo d'una quantità indeterminata: dico qui, perciocchè vi sono dei casi dove questo non succede; ma allora la espressione proposta non ha la stessa origine della precedente.

70. Per darne un esempio, sia

$$\frac{a\,(a^2-b^2)}{b\,(a-b)}.$$

Questa quantità nella sua forma attuale diviene $\frac{0}{0}$ quando si suppone $a=b$; ma se si riduce prima alla sua più semplice espressione, togliendo via il fattore $a-b$ comune al nume-

(*) Per abbreviare il discorso, gli analisti applicano alle equazioni stesse l'epiteto d'*identiche*: così

$\frac{y}{b}=\frac{y}{b}$ è un'equazione identica; $5-3x=5-3x$ n'è un'altra; e quando due equazioni non esprimono che la stessa cosa, si dice pure che queste due equazioni sono identiche.

ratoro ed al denominatore, si trova

$$\frac{a(a+b)}{b},$$

che dà $2a$ nel caso di $a=b$.

Non accade lo stesso dei valori di x e di y trovati nel numero antecedente; poichè essi non sono suscettibili d'essere ridotti ad una espressione più semplice.

Pertanto risulta da quel che si è detto, che quando s'incontra un'espressione che diventa $\frac{0}{0}$, bisogna, prima di decidere del suo valore, cercare se il numeratore ed il denominatore abbiano qualche fattore comune, il quale diventando nullo, renda questi due termini eguali a zero nel medesimo tempo; e togliendolo, si otterrà il vero valore dell'espressione proposta. Vi sono peraltro dei casi che potrebbero sottrarsi a questo metodo; ma i limiti di questa opera non mi permettono che di far osservare soltanto il *fatto analitico*. Nel *trattato del Calcolo differenziale* si danno i metodi generali per trovare il vero valore delle quantità che diventano $\frac{0}{0}$ (*).

71. Ciò che precede dimostra chiaramente che *le soluzioni algebriche, o soddisfanno completamente all'enunciato del problema, quando esso è possibile, o indicano una modificazione da farsi nell'enunciato, allorchè i dati presentano contraddizioni che possono essere tolte, o finalmente fanno conoscere un'impossibilità assoluta, qualora non v'è alcun mezzo di risolvere coi medesimi dati un problema analogo in certo senso al proposto.*

72. Bisogna osservare nella soluzione dei differenti casi del problema precedente, che il cangiamento di segno delle incognite x ed y corrisponde ad un cangiamento nella direzione degli spazi da queste incognite rappresentati. Quando l'incognita y era contata da B verso A, essa aveva nell'equazione

$$x+y=a$$

il segno $+$, ed ha preso il segno $-$ nel secondo caso, allorchè si è portata dal lato opposto, ossia da B verso C, numero 65, poichè si è avuta per prima equazione

$$x-y=a.$$

(*) Veggasi il *Trattato del Calcolo differenziale*, e del *Calcolo integrale* Tom. I, ovvero il *Trattato elementare* sopra lo stesso soggetto

Effettuando questo cangiamento di segno nella seconda equazione

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{c},$$

si troverebbe

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{c},$$

risultamento che non è quello che si è dato nel citato numero; ma è uopo riflettere che lo spazio y si compone di multipli dello spazio c che percorre in un' ora il corriere partito dal punto B, e questo spazio essendo diretto nel medesimo senso dello spazio y, dev' essere supposto del medesimo segno, e prendere per conseguenza il segno — allorchè questo si dà ad y: in grazia di tale osservazione si avrà

$$\frac{x}{b} = \frac{-y}{-c}, \quad \text{ovvero} \quad \frac{x}{b} = \frac{y}{c}.$$

Basta dunque un semplice cangiamento di segno per comprendere il secondo caso del problema nel primo; e per tal modo l' Algebra somministra ad un tempo la soluzione di più problemi analoghi.

Il problema del numero 15 n' offre un esempio molto evidente. Si suppose in quell' articolo che il padre doveva al figlio una somma d; ora se si vuol risolvere il problema nell' ipotesi opposta, vale a dire supponendo che il figlio debba a suo padre la somma d, basterà cangiare il segno di d nel valore di x, e si avrà

$$x = \frac{bc - d}{a + b}:$$

finalmente se, fatti i conti, nè il padre deve dare al figlio, nè questi al padre, converrà fare $d = 0$, e verrà

$$x = \frac{bc}{a + b}.$$

Niente è più facile che verificare queste due soluzioni, ponendo di nuovo il problema in equazione per ciascuno dei casi che si sono ora enunciati.

73. A solo oggetto di conservare l' analogia tra i problemi dei numeri 56 e 64 ho impiegato due incognite nel se-

condo. Si potrebbe risolvere sì l'uno che l'altro con un' incognita sola: imperocchè, quando si dice che l' operajo ha ricevuto 74 franchi per 12 giorni del suo lavoro e per 7 di quello di sua moglie e di suo figlio, ne risulta che se si chiama y il guadagno della moglie e del figlio, e se da 74 franchi si toglie $7y$, resta $74 - 7y$ per dodici giornate dell' operajo; dal che segue ch' esso guadagna $\frac{74-7y}{12}$ per giorno.

Calcolando nella stessa maniera il di lui guadagno per la seconda circostanza, si troverà ch' ei guadagna $\frac{50-5y}{8}$ per giorno.

Ed eguagliando queste due quantità, si formerà l'equazione

$$\frac{74-7y}{12} = \frac{50-5y}{8}.$$

Parimente nel problema del numero 64

A R B

se x denota lo spazio AR percorso dal corriere partito dal punto A, $BR = a - x$ sarà quello percorso dal corriere partito dal punto B andando verso A; questi due spazi essendo percorsi nel tempo medesimo dai corrieri che fanno rispettivamente i numeri b e c di chilometri per ora, si avrà

$$\frac{x}{b} = \frac{a-x}{c},$$

donde emerge

$$cx = ab - bx;$$

$$x = \frac{ab}{b+c}.$$

La differenza tra le soluzioni ora esibite e quelle dei numeri 56 e 64 non consiste che in questo, vale a dire, che si è formata e risoluta la prima equazione col soccorso del linguaggio ordinario, senza adoprarvi la scrittura algebrica; ed è manifesto che quanto più si porta avanti l'uso del primo modo, tanto meno resta da fare col secondo.

74. Si aggiunge qualche volta al problema del numero 64 una circostanza che nol rende guari più difficile.

A R C B

Si suppone che il corriere partito dal punto B *si sia messo in viaggio un numero* d *di ore prima di quello che parte dal punto* A.

È chiaro che ciò si riduce a cangiare il punto di partenza del primo; poichè se percorre un numero c di chilometri per ora, percorrerà uno spazio $BC = cd$ in d ore; e si troverà nel punto C, allorchè l' altro corriere partirà dal punto A; di modo che l' intervallo tra i due punti di partenza sarà

$$AC = AB - BC = a - cd.$$

Scrivendo dunque $a - cd$ in luogo di a nell' equazione del numero precedente, si avrà

$$\frac{x}{b} = \frac{a - cd - x}{c},$$

e quindi

$$x = \frac{ab - bcd}{b + c}.$$

Se i corrieri andassero nel medesimo senso,

A B C R

l' intervallo tra i punti di partenza sarebbe

$$AC = AB + BC = a + cd,$$

e la strada percorsa dal corriere partito dal punto A sarebbe AR, mentre quella percorsa dall' altro corriere sarebbe

$$CR = AR - AC;$$

si avrebbe dunque

$$\frac{x}{b} = \frac{x - a - cd}{c},$$

e di qui

$$x = \frac{ab + bcd}{b - c}.$$

75. Il problema enunciato in questa guisa dà luogo ad un caso nel quale l' interpetrazione del valore negativo che si trova per x, presenta qualche difficoltà; ciò accade tutte le volte che, nel supposto che i due corrieri camminino in sensi contrari, si assegna a d un valor tale, che lo spazio BC rap-

presentato da cd riesce maggiore della distanza AB, la quale è denotata da a.

$C \quad R \quad A \qquad B$

In tale ipotesi il corriere partito dal punto B si trova in C, dall'altra parte dal punto A, nel momento che si fa partire l'altro corriere da A verso il punto B; adunque il supporre che in questo stato di cose i due corrieri s'incontrino, dee menare necessariamente all'assurdo.

Se, per esempio, si avesse

$$a = 400^{\text{chil.}},\ b = 12^{\text{chil.}},\ c = 8^{\text{chil.}},\ d = 60^{\text{ore}},$$

ne risulterebbe $cd = 480^{\text{chil.}}$, e per conseguenza il punto C sarebbe $80^{\text{chil.}}$ al di là del punto A, rispetto al punto B; ma allora si troverebbe

$$x = \frac{400 \,.\, 12 - 60 \,.\, 8 \,.\, 12}{8 + 12} = \frac{400 \,.\, 3 - 60 \,.\, 2 \,.\, 12}{2 + 3}$$

$$= \frac{1200 - 1440}{5} = -\frac{240}{5} = -48.$$

Per la qual cosa l'incontro de' corrieri succederebbe in un punto R situato alla distanza di $48^{\text{chil.}}$ dall'altra parte del punto A, ma tra A e C, tuttochè sembri che il corriere partito da B, dovendo continuare il suo cammino al di là del punto C, non possa essere raggiunto dall'altro corriere che dopo di aver oltrepassato questo punto.

Frattanto per conoscere qual problema sia stato risoluto in questo caso, è necessario sostituire nell'equazione in vece di x il numero negativo $-m$, la quale equazione per tale sostituzione diventa

$$-\frac{m}{b} = \frac{a - cd + m}{c},$$

ovvero, cangiando i segni dei due membri,

$$\frac{m}{b} = \frac{cd - a - m}{c}.$$

Da ciò si vede che il cammino fatto dal corriere partito

C R . A B

dal punto B, è $cd - a - m$, ovvero ciò che resta di BC quando se ne toglie AB insieme con AR, vale a dire, è CR; e che $AC = cd - a$: è dunque come se il secondo corriere avesse dovuto partire immediatamente dal punto C in cui si trovava nell' istante della partenza del primo; ma perchè essi vanno in sensi contrari, il loro incontro dee necessariamente accadere nell' intervallo AC. In siffatta guisa il caso presente rientra nel primo tra quelli del numero 74, ove basta cangiare $a - cd$ in $cd - a$ per ottenere il valore che avrebbe m nell' equazione di sopra. (*Si vegga la nota alla fine del volume*).

76. Il problema del numero 56, reso generale, si enuncia come segue:

Un operajo avendo lavorato un numero a *di giorni in una casa, ed avendo avuto seco sua moglie e suo figlio per un numero* b *di giorni, ha ricevuto una somma* c; *di poi avendo lavorato nella medesima casa un numero* d *di giorni, ed avendo questa volta avuto con sè per un numero* e *di giorni sua moglie e suo figlio, ha ricevuto una somma* f: *si domanda quanto esso guadagnava al giorno per parte sua, e quanto guadagnavano pel tempo medesimo sua moglie insieme e suo figlio.*

Detto qui pure x il prezzo della giornata dell' operajo, ed y quello della giornata della moglie insieme e del figlio, è chiaro che:

per un numero a di giorni l' operajo avrà ax,

per un numero b di giorni sua moglie e suo figlio avranno by;

dunque per la prima condizione del problema si avrà

$$ax + by = c:$$

per un numero d di giorni l' operajo avrà dx,

per un numero e di giorni sua moglie e suo figlio avranno ey;

dunque per la seconda condizione verrà

$$dx + ey = f:$$

e queste sono le due equazioni generali del problema.

Dalla prima si trae

$$x = \frac{c - by}{a};$$

e moltiplicando questo valore per d, onde sostituirlo in luogo di x nella seconda, si avrà

$$dx = \frac{cd - bdy}{a},$$

e per conseguente

$$\frac{cd - bdy}{a} + ey = f.$$

Ora si liberi questa equazione dalle frazioni, e si otterrà

$$cd - bdy + aey = af,$$

e di qui si conchiuderà successivamente

$$aey - bdy = af - cd,$$

$$y = \frac{af - cd}{ae - bd}.$$

Conosciuta così la y, se il suo valore si pone in quello della x, quest' ultimo sarà cognito; e si avrà

$$x = \frac{c - b\,\dfrac{af - cd}{ae - bd}}{a}.$$

Ora per rendere semplice questa espressione, bisogna prima di tutto fare la moltiplicazione accennata sopra le quantità

$$b \quad \text{ed} \quad \frac{af - cd}{ae - bd} \quad (53),$$

il che dà

$$x = \frac{c - \dfrac{abf - bcd}{ae - bd}}{a};$$

poi ridurre c al denominatore della frazione che l' accompagna, ed eseguire la sottrazione di questa frazione (51): e verrà

$$x = \frac{\dfrac{ace - bcd - abf + bcd}{ae - bd}}{a},$$

cioè, fatta la riduzione,

$$x = \frac{\dfrac{ace - a^2f}{ae - bd}}{a} \quad (*).$$

Eseguendo la divisione per a (53), troverassi

$$x = \frac{ace - abf}{a^2e - abd},$$

e togliendo il fattore a comune al numeratore ed al denominatore (38), si avrà infine

$$x = \frac{ce - bf}{ae - bd}.$$

(*) Perchè non rimanga alcun dubbio intorno al significato di cotesta espressione, è d'uopo riflettere alla linea di divisione, che si trova situata nello stesso rigo della stampa. Così nell'espressione $x = \frac{A}{B}$, A rappresenta il dividendo, sia intero, sia frazionario, e B il divisore nell'una e nell'altra ipotesi. Secondo questa convenzione l'espressione $x = \frac{\frac{A}{C}}{B}$ significa che x è uguale al quoziente della frazione $\frac{A}{C}$ divisa per B, e l'espressione $x = \frac{A}{\frac{B}{C}}$ denota che x è uguale al quoziente di A diviso per la frazione $\frac{B}{C}$; finalmente l'espressione $x = \frac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}}$ denota che x è uguale al quoziente della frazione $\frac{A}{C}$ divisa per la frazione $\frac{B}{D}$.

Queste osservazioni dimostrano la necessità di situare le linee di divisione in modo conforme al risultamento che si vuole indicare.

I valori

$$x=\frac{ce-bf}{ae-bd}, \qquad y=\frac{af-cd}{ae-bd}$$

si applicano allo stesso modo che quelli trovati più sopra per le equazioni letterali ad una sola incognita: non hanno che a sostituirsi in essi in luogo delle lettere i numeri particolari all' esempio che si sceglie.

Così, si otterranno i risultamenti del numero 56, ponendo

$$a=12,\quad b=7,\quad c=74,$$
$$d=8,\quad e=5,\quad f=50;$$

e quelli del numero 58, facendo

$$a=12,\quad b=7,\quad c=46,$$
$$d=8,\quad e=5,\quad f=30.$$

77. I valori di x e di y non convengono solamente alla quistione proposta: essi si estendono a tutte quelle che conducono a due equazioni di primo grado a due incognite, perciocchè è manifesto essere tali equazioni necessariamente comprese nelle formole

$$ax+by=c,$$
$$dx+ey=f,$$

purchè con le lettere a, b, d, e s'intendano espressi gli aggregati delle quantità date che moltiplicano rispettivamente le incognite x ed y, e con le lettere c, f gli aggregati dei termini noti, trasportati nel secondo membro.

Della risoluzione di un numero qualunque di equazioni del primo grado, che contengono un egual numero d' incognite.

78. Allorchè un problema racchiude tante condizioni distinte quante sono le incognite in esso, ciascuna di queste condizioni somministra un' equazione, nella quale succede spesso che le incognite siano mescolate tra loro, come si è già veduto accadere nei problemi a due incognite; ma se coteste incognite non sono che al primo grado, si potrà *prendere*, col modo tenuto nei numeri precedenti, *in una delle*

equazioni il valore di una delle incognite, come se tutto il rimanente fosse noto, e sostituire questo valore in tutte le altre equazioni, le quali in grazia di tal sostituzione non conterranno che le altre incognite.

Questa operazione, con la quale si manda via una delle incognite, si chiama *eliminazione*. Pertanto se si avranno tre equazioni a tre incognite, col mezzo dell' eliminazione se ne dedurranno due equazioni a due incognite, sulle quali si opererà come qui sopra; ed avendo ottenuti i valori delle due ultime incognite, si sostituiranno nell' espressione della prima.

Se si avranno quattro equazioni a quattro incognite, se ne dedurranno primieramente tre equazioni a tre incognite, sulle quali si opererà nel modo dianzi esposto; poi i ritrovati valori delle tre incognite si sostituiranno nell' espressione della prima, e così di seguito.

Ecco per modo d' esempio un problema che contiene tre incognite e tre equazioni.

79. *Sono stati comprati separatamente i carichi di tre vetture: il primo, che consisteva in 30 misure di segale, 20 d'orzo e 10 di grano, è costato 230 franchi;*

Il secondo, che consisteva in 15 misure di segale, 6 d'orzo e 12 di grano, è costato 138 franchi;

Il terzo, che consisteva in 10 misure di segale, 5 d'orzo e 4 di grano, è costato 75 franchi:

Si vuol sapere il prezzo della misura della segale, di quella dell' orzo, e di quella del grano.

Sia x il prezzo della misura della segale,

y quello della misura dell' orzo,

z quello della misura del grano.

Per adempiere la prima condizione, si osserverà che

30 misure di segale valeranno $30x$,

20 misure d' orzo valeranno $20y$,

10 misure di grano valeranno $10z$;

e come il tutto deve fare 230 franchi, si avrà l' equazione

$$30x + 20y + 10z = 230:$$

Per la seconda condizione si avranno

15 misure di segale che valeranno $15x$,

6 d' orzo $6y$,

12 di grano $12z$,

e per conseguente

$$15x + 6y + 12z = 138:$$

Per la terza condizione si avranno

10 misure di segale che valeranno		$10x$,
5	d' orzo	$5y$,
4	di grano	$4z$,

e per conseguente

$$10x + 5y + 4z = 75.$$

La quistione proposta sarà dunque ridotta alle tre equazioni

$$30x + 20y + 10z = 230,$$
$$15x + 6y + 12z = 138,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Prima d' intraprenderne la risoluzione, esamino se sia per avventura possibile di renderle più semplici, con dividere i due membri di qualcheduna (12) per un medesimo numero; e mi accorgo potersi dividere per 10 tutti i termini della prima, e per 3 tutti quelli della seconda: eseguite queste divisioni, non avrò che ad occuparmi delle equazioni

$$3x + 2y + z = 23,$$
$$5x + 2y + 4z = 46,$$
$$10x + 5y + 4z = 75.$$

Ora nel prendere il valore di una delle incognite in una delle equazioni per sostituirlo nelle altre, essendo arbitraria sì la scelta dell' incognita che quella dell' equazione, traggo il valore di z dalla prima equazione, perchè questa incognita non avendo in essa un coefficiente diverso dall' unità, il suo valore sarà una quantità senza divisore, cioè una quantità intera; e così verrà

$$z = 23 - 3x - 2y.$$

Sostituendo poi questo valore nella seconda e nella terza equazione, queste verranno cangiate nelle altre

$$5x + 2y + 92 - 12x - 8y = 46,$$
$$10x + 5y + 92 - 12x - 8y = 75;$$

e riducendo i loro primi membri, si troverà

$$92-7x-6y=46,$$
$$92-2x-3y=75.$$

Per maneggiare queste equazioni, le quali non contengono ora che due sole incognite, prendo nella prima il valore dell' incognita y, ed ottengo

$$y=\frac{92-46-7x}{6}, \qquad \text{ovvero} \qquad y=\frac{46-7x}{6};$$

e mediante la sostituzione di questo valore, la seconda equazione diverrà

$$92-2x-3\times\frac{46-7x}{6}=75.$$

Potrei mandar via il denominatore 6 alla maniera ordinaria; ma osservo che questo denominatore essendo divisibile per 3, può esser reso più semplice, eseguendo sulla frazione $\frac{46-7x}{6}$ la moltiplicazione per 3, conformemente al numero 54 dell'*Aritmetica*: per tal modo avrò

$$92-2x-\frac{46-7x}{2}=75.$$

Facendo ora sparire il denominatore 2, trovo

$$184-4x-46+7x=150;$$

ed eseguita la riduzione del primo membro, viene

$$138+3x=150,$$

da cui finalmente si conchiude

$$x=\frac{150-138}{3}=\frac{12}{3}, \quad \text{cioè} \quad x=4.$$

La sostituzione di questo valore nell'espressione di y dà

$$y=\frac{46-7\times4}{6}=\frac{46-28}{6}=\frac{18}{6}, \quad \text{cioè} \quad y=3;$$

ed in virtù della sostituzione dei valori di x e di y nell'espressione di z, si ottiene

$$z = 23 - 3 \times 4 - 2 \times 3 = 23 - 12 - 6, \quad \text{cioè} \quad z = 5.$$

Di qui segue che la misura di segale valeva 4 franchi,
quella d'orzo 3,
quella di grano 5.

Questo esempio, mentre offre l'applicazione del metodo del numero precedente, è notabile per le abbreviazioni di calcolo praticate in esso.

80. Per esercizio dell'eliminazione passo a risolvere ulteriormente il seguente problema.

Un uomo che si è incaricato di trasportare vasi di porcellana di tre grandezze diverse, ha pattuito ch'ei pagherà tanto per ogni vaso che romperà, quanto riceverà per ciascheduno di quelli che consegnerà in buono stato.

Da prima gli si consegnano due vasi piccoli, quattro medi e nove grandi; rompe i medi, consegna tutti gli altri in buono stato, e riceve per questo primo trasporto la somma di 28 franchi.

Di poi gli si danno sette vasi piccoli, tre medi e 5 grandi; questa volta consegna in buono stato i piccoli e i medi, ma rompe i cinque grandi, e riceve solamente 3 franchi.

Finalmente gli si consegnano nove vasi piccoli, dieci medi ed undici grandi; rompe tutti gli ultimi, e non riceve in conseguenza che 4 franchi.

Si cerca sapere ciò che si è pagato pel trasporto d'un vaso di ciascuna grandezza.

Sia x il prezzo del trasporto d'un vaso piccolo,
y quello del trasporto d'un vaso medio,
z quello del trasporto d'un vaso grande.

Ora egli è palese che ciascheduna delle somme ricevute dal facchino è la differenza tra ciò che gli tocca pei vasi che ha consegnati in buono stato, e ciò che deve pagare per quelli che ha rotti; dopo questa osservazione, dalle tre condizioni del problema si ricavano respettivamente le equazioni

$$2x - 4y + 9z = 28,$$
$$7x + 3y - 5z = 3,$$
$$9x + 10y - 11z = 4.$$

Dalla prima di queste equazioni si ha

$$x=\frac{28+4y-9z}{2};$$

ed in grazia della sostituzione di questo valore, la seconda e la terza equazione diventeranno

$$\frac{196+28y-63z}{2}+3y-5z=3,$$

$$\frac{252+36y-81z}{2}+10y-11z=4.$$

Mandati via i denominatori, si avrà

$$196+28y-63z+6y-10z=6,$$
$$252+36y-81z+20y-22z=8;$$

e ridotti i primi membri, otterrassi

$$196+34y-73z=6,$$
$$252+56y-103z=8:$$

poi, preso il valore di y nella prima di queste equazioni, risulterà

$$y=\frac{73z-190}{34}.$$

In virtù di questo valore la seconda diventa

$$252+56\times\frac{73z-190}{34}-103z=8,$$

che liberata dal denominatore 34, assume la forma

$$34\times 252+56\times 73z-56\times 190-34\times 103z=34\times 8,$$

ovvero l'altra

$$8568+4088z-10640-3502z=272.$$

La riduzione del primo membro di questo risultamento conduce a

$$586z-2072=272,$$

da cui si trae

$$z=\frac{2344}{586},\quad \text{ovvero}\quad z=4.$$

E ritornando dal valore di z a quello di y, si avrà

$$y=\frac{73\times4-190}{34}=\frac{292-190}{34}=\frac{102}{34},\quad \text{ovvero}\quad y=3;$$

infine con questi due valori si troverà

$$x=\frac{28+4\times3-9\times4}{2}=\frac{28+12-36}{2}=\frac{4}{2},\ \text{ovvero}\ x=2.$$

Laonde si sono pagati 2 fr. pel trasporto di un vaso piccolo,
3 per quello di un vaso medio,
4 per quello di un vaso grande.

Questi pochi esempî sono bastanti a mostrare l'andamento da tenersi in tutti gli altri casi.

81. Spesso accade che le incognite non entrino tutte in ciascheduna equazione; ma questa circostanza non cangia il metodo: basta esaminar bene il concatenamento delle incognite per passare dalle une alle altre.

Siano a cagion d'esempio le quattro equazioni

$$3u-2y=2,$$
$$2x+3y=39,$$
$$5x-7z=11,$$
$$4y+3z=41$$

tra le incognite u, x, y e z.

Con lieve riflessione si scorge che prendendo il valore di x nella seconda equazione e sostituendolo nella terza, il risultamento, che allora conterrà solo y e z, mediante la sua combinazione coll'equazione quarta, farà conoscere queste due quantità; poi col valore di y si avranno quelli di u e di x per mezzo della prima e della seconda equazione. Operando in tal guisa, si darà luogo al calcolo seguente:

$$x=\frac{39-3y}{2},$$

$$5\times\frac{39-3y}{2}-7z=11,$$

ovvero $195 - 15y - 14z = 22$,

cioè $15y + 14z = 173$ (57).

Le due equazioni

$$15y + 14z = 173\,,$$
$$4y + 3z = 41\,,$$

venendo risolute, daranno

$$y = 5\,, \qquad z = 7\,;$$

e col mezzo di questi valori si avrà

$$x = \frac{39 - 3 \times 5}{2} = \frac{39 - 15}{2} = \frac{24}{2}\,, \quad \text{cioè} \quad x = 12\,,$$

$$u = \frac{2 + 2y}{3} = \frac{2 + 10}{3} = \frac{12}{3} \quad \text{cioè} \quad u = 4:$$

adunque i numeri cercati sono

4, 12, 5 e 7.

82. Il metodo precedentemente esposto si applicherebbe alle equazioni letterali nell' istesso modo che alle equazioni numeriche; ma la moltitudine delle lettere che bisognerebbe impiegare per esprimere generalmente i dati, quando il numero delle equazioni e delle incognite è più di due, ha impegnato gli algebristi a cercare una maniera di rappresentarli con più semplicità. Io la farò conoscere nell' articolo seguente; intanto, per porgere al lettore l' occasione di esercitarsi a mettere i problemi in equazione ed a risolverli, ho scritto qui sotto una serie di enunciati, ed ho accennato alla line di ciascuno di essi il risultamento cui deesi pervenire.

1.° *Un padre, interrogato sull' età di suo figlio, risponde: se dal doppio dell' età che ha presentemente, si tolga il triplo di quella che aveva sei anni addietro, si avrà la sua età attuale.*

Risposta: *il figlio aveva 9 anni.*

2.° *Diofante, autore del più antico libro d' Algebra che ci rimanga, consumò nell' infanzia un sesto del tempo che visse, ed un dodicesimo nell' adolescenza; poi ammogliossi, e passò in questa unione un settimo di sua vita, più cinque anni; indi ebbe un figlio, al quale sopravvisse quattro anni; il figlio poi non giunse che alla metà dell' età alla quale pervenne suo padre: che età aveva Diofante quando morì?*

Risposta : 84 *anni.*

3.° *Un mercante toglie nel principio di ogni anno dai fondi che ha in commercio, la somma di 1000 franchi per le spese di sua famiglia; ciò non ostante ogni anno il suo capitale s'aumenta del terzo di ciò che resta, ed alla fine di tre anni trovasi raddoppiato: quanto aveva egli al principio della prima annata ?*

Risposta : 14800 *franchi.*

4.° *Un mercante ha due specie di thè, la prima di 14 franchi il chilogrammo, la seconda di 18 franchi; quanti chilogrammi deve egli prendere di ciascuna specie per formarne una cassa di 100 chilogrammi, che valga 1680 franchi?*

Risposta : *30 chilogrammi della prima e 70 della seconda.*

5.° *Un vaso della capacità di 39 litri è stato empiuto in 12 minuti, facendovi scorrere successivamente due fontane, delle quali una dava 4 litri d'acqua a minuto e l'altra 3; si domanda per quanti minuti ciascuna fontana ha versato acqua nel vaso.*

Risposta : *la prima per 3 minuti, e la seconda per 9.*

6.° *Quando un oriuolo segna mezzodì, la lancetta dei minuti sta sopra quella delle ore; si domanda in qual punto del quadrante succederà il prossimo futuro incontro delle lancette.*

Risposta : *in quello che dinota 1 ora, 5 minuti e* $\frac{5}{11}$ *di minuto.*

Osservazione. Questo problema è un caso particolare di quello risoluto nel numero 65.

7.° *Un uomo incontrando alcuni poveri, vuol dare 25 centesimi a ciascuno, ma contando il suo danaro, s'accorge che per ciò fare gli mancano 10 centesimi; allora egli non dà che 20 centesimi a ciascun povero, e gli rimangono 25 centesimi: si domanda quanto danaro aveva quest'uomo, e quanti erano i poveri.*

Risposta : *aveva 1 franco e 65 centesimi, e i poveri erano 7.*

8.° *Tre fratelli hanno comprato un podere per 50000 franchi; manca al primo, per pagare da sè solo questo acquisto, la metà del danaro che ha il secondo; questi pagherebbe l'acquisto da sè solo, se a ciò che possiede si aggiungesse il terzo di ciò che ha il primo; il terzo, per fare il medesimo pagamento, avrebbe bisogno di unire a ciò che ha, il quarto di quel che possiede il primo: quanto danaro ha ciascheduno?*

Risposta : *il primo ha 30000 franchi, il secondo 40000 ed il terzo 42500.*

9.° *Tre giuocatori, dopo di aver fatto una partita, contano il loro danaro, e trovano che un solo ha perduto, e che*

ciascuno degli altri due ha vinto una somma eguale a quella con cui si è posto a giuocare ; dopo una seconda partita uno dei giuocatori , che aveva vinto nella precedente , perde , e ciascuno degli altri due guadagna una somma eguale a quella che aveva nel principio della seconda partita ; in una terza partita il giuocatore , che fino allora aveva vinto , perde , e ciascuno degli altri due guadagna una somma eguale a quella che aveva nel principio di quest'ultima partita : allora finiscono di giuocare , ed ognuno di essi si trova con 120 franchi. Quanto aveva ciascheduno dei tre giuocatori entrando in giuoco ?

Ris. *Quegli che ha perduto nella* 1.ª *partita aveva* 195 *franchi* ,
quegli che ha perduto nella 2.ª 105,
quegli che ha perduto nella 3.ª 60.

Formule generali per la risoluzione delle equazioni del primo grado.

83. Per evitare l'inconveniente notato nel principio del numero precedente , si è immaginato di rappresentare con la medesima lettera tutti i coefficienti di una medesima incognita, ma di distinguerli , apponendo alla lettera che li denota , uno o più accenti , secondo il numero delle equazioni.

Le equazioni generali a due incognite si scrivono così :

$$ax + by = c,$$
$$a'x + b'y = c'.$$

I coefficienti dell'incognita x sono rappresentati tutti e due da a , e quelli di y da b ; ma l'accento che portano le lettere della seconda equazione, mostra che queste non si riguardano punto come aventi lo stesso valore delle loro corrispondenti nella prima. Così a' è una quantità differente da a , b' una quantita differente da b.

Quando le equazioni sono tre , si scrivono così :

$$ax + by + cz = d,$$
$$a'x + b'y + c'z = d',$$
$$a''x + b''y + c''z = d''.$$

Tutti i coefficienti dell'incognita x sono denotati dalla lettera a , quelli di y da b , quelli di z da c ; ma ciascuna lettera viene affetta da un numero differente di accenti , i quali ne

avvertono che esse appartiene a diverse quantità. Così a, a', a'' sono tre quantità diverse, e lo stesso dicasi delle altre.

Seguendo questo tenore, se vi fossero quattro incognite e quattro equazioni, si scriverebbero in questo modo:

$$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c\ z + d\ u &= e\,, \\ a'\ x + b'\ y + c'\ z + d'\ u &= e'\,, \\ a''\ x + b''\ y + c''\ z + d''\ u &= e''\,, \\ a'''x + b'''y + c'''z + d'''u &= e'''\,; \end{aligned}$$

e così di seguito.

84. Si eviteranno le frazioni, e però i calcoli si renderanno più semplici, modificando la maniera di fare l'eliminazione nella seguente guisa.

Siano le equazioni.

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c\,, \\ a'x + b'y &= c'\,, \end{aligned}$$

e si voglia da esse eliminare una delle incognite. È manifesto che se una delle incognite, per esempio la x, avesse nelle due equazioni il medesimo coefficiente, basterebbe, per fare sparire questa incognita, sottrarre da una di tali equazioni l'altra. Ciò si scorge a prima vista nelle equazioni

$$\begin{aligned} 10x + 11y &= 27\,, \\ 10x + \ 9y &= 15\,, \end{aligned}$$

le quali, mediante l'accennata sottrazione, danno subito

$$11y - 9y = 27 - 15\,, \quad \text{ovvero} \quad 2y = 12, \quad \text{cioè} \quad y = 6.$$

Ora si possono rendere, come ognun vede, immediatamente uguali i coefficienti della x nelle due equazioni

$$\begin{aligned} a\,x + b\,y &= c\,, \\ a'x + b'y &= c'\,, \end{aligned}$$

moltiplicando i due membri della prima per a', coefficiente della x nella seconda, e i due membri della seconda per a, coefficiente della x nella prima; in tal modo si ottiene

$$\begin{aligned} aa'x + a'by &= a'c\,, \\ aa'x + ab'y &= ac'\,. \end{aligned}$$

Sottraendo poi la prima di queste equazioni dalla seconda,

sparirà l'incognita x, e si avrà solamente

$$(ab' - a'b)\,y = ac' - a'c,$$

equazione che non contiene che la sola incognita y; e se ne dedurrà

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

E qui si noti che il metodo di eliminazione ora adoperato può sempre applicarsi alle equazioni di primo grado, per mandarne via una qualunque delle incognite.

In conseguenza si otterrà il valore di x, eliminando nel modo stesso l'incognita y dalle due equazioni proposte.

Si moltiplichi perciò ciascun membro della prima equazione per b', coefficiente di y nella seconda, e ciascun membro della seconda per b, coefficiente di y nella prima, e poi si sottragga dalla prima delle ottenute equazioni la seconda; e verrà

$$(ab' - ba')\,x = cb' - bc',$$

da cui si trae

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Nell'applicare siffatto metodo alle tre equazioni scritte di sopra (83), le quali contengono x, y, z, potrà cominciarsi dall'eliminare x dalla prima e dalla seconda, e poi dalla prima e dalla terza; così perverrassi a due equazioni, le quali conterranno le sole incognite y e z; indi da queste due equazioni si eliminerà y.

Eseguendo il calcolo, l'equazione in z, alla quale si giungerà, avrà un fattore comune a tutti i suoi termini, e per conseguenza non sarà la più semplice che ottener si possa.

85. Bézout ha dato un metodo semplicissimo per eliminare ad un tratto tutte le incognite, tranne una. In virtù di questo metodo il problema si riduce immediatamente ad equazioni che contengono un'incognita di meno delle proposte. Benchè un tal metodo non sia necessario che quando si tratti di equazioni a tre, o ad un maggior numero d'incognite, pure comincerò dall'applicarlo a quelle che non ne contengono che due, per abbracciare il soggetto in tutta la sua estensione.

Siano le due equazioni

$$ax + by = c$$
$$a'x + b'y = c';$$

moltiplicando la prima per la quantità indeterminata m, verrà

$$amx + bmy = cm;$$

e sottraendo da questo risultamento l' equazione

$$a'x + b'y = c',$$

si avrà

$$amx - a'x + bmy - b'y = cm - c',$$

ovvero

$$(am - a')\,x + (bm - b')\,y = cm - c'.$$

Ora essendo m una quantità arbitraria, come quella che da niuna condizione è determinata, può supporsi che abbia valore tale da rendere $bm = b'$. In questa ipotesi, svanendo il termine moltiplicato per y, a cagion dell' altro fattore $bm - b' = 0$, si ha

$$x = \frac{cm - c'}{am - a'};$$

ma dall' equazione di condizione $bm = b'$ risulta

$$m = \frac{b'}{b};$$

dunque

$$x = \frac{\frac{cb'}{b} - c'}{\frac{ab'}{b} - a'} = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}.$$

Se in vece di supporre $bm = b'$, si fa $am = a'$, svanirà il termine affetto da x, e verrà

$$y = \frac{cm - c'}{bm - b'}.$$

Ma il valore di m non sarà più quello di prima, giacchè per l'altra ipotesi avrassi

$$m = \frac{a'}{a};$$

e sostituendo questo diverso valore di m nell'espressione di y, si troverà

$$y = \frac{ca' - ac'}{ba' - ab'}.$$

Cangiando i segni del numeratore e del denominatore di questo valore (57), il suo denominatore sarà lo stesso che quello di x, poichè si avrà

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}.$$

86. Siano ora le tre equazioni

$$\begin{aligned} a\ x + b\ y + c\ z &= d \\ a'\ x + b'\ y + c'\ z &= d' \\ a''x + b''y + c''z &= d''; \end{aligned}$$

l'analogia ci condurrà facilmente a moltiplicare la prima e la seconda respettivamente per due quantità indeterminate m ed n, a sommarle insieme, ed a sottrarne la terza; perchè in tal guisa esse saranno impiegate tutte nello stesso tempo, e le due nuove quantità m ed n, che dipendono dal nostro arbitrio, potranno essere determinate in modo da fare sparire ad un tratto due delle incognite dal risultamento. Operando così, e riunendo i termini che moltiplicano una stessa incognita, si avrà

$$(am + a'n - a'')\,x + (bm + b'n - b'')\,y + (cm + c'n - c'')z \\ = dm + d'n - d''.$$

Volendo eliminare x ed y, converrà stabilire le due equazioni di condizione

$$am + a'n = a'',$$
$$bm + b'n = b'',$$

ed allora verrà

$$z=\frac{dm+d'n-d''}{cm+c'n-c''}.$$

Dalle due equazioni, in cui m ed n sono le incognite, facilmente si traggono i valori di queste quantità coll' aiuto delle formole ottenute nel numero precedente; poichè basterà scambiare in esse x in m ed y in n, e scrivere in luogo delle lettere

$$\left.\begin{matrix} a\,,\ b\,,\ c \\ a',\ b',\ c' \end{matrix}\right\} \text{ le lettere } \left\{\begin{matrix} a\,,\ a'\,,\ a'' \\ b\,,\ b'\,,\ b'' \end{matrix}\right.,$$

il che darà

$$m=\frac{a''b'-b''a'}{a\,b'-b\,a'}$$

$$n=\frac{ab''-ba''}{ab'-ba'}.$$

Sostituendo questi valori in quello di z, e riducendo tutti i termini al medesimo denominatore, si troverà

$$z=\frac{d\,(b'a''-a'b'')+d'\,(ab''-ba'')-d''\,(ab'-ba')}{c\,(b'a''-a'b'')+c'\,(ab''-ba'')-c''\,(ab'-ba')}.$$

Se si fossero fatti svanire i termini affetti da x e da z, si sarebbe avuto y; le lettere m ed n sarebbero allora dipendute dalle due equazioni

$$am+a'n=a'',\qquad\qquad cm+c'n=c'';$$

ed operando come sopra, si sarebbe trovato

$$y=\frac{d\,(c'\,a''-a'\,c'')+d'\,(ac''-ca'')-d''\,(ac'-ca')}{b\,(c'\,a''-a'\,c'')+b'\,(ac''-ca'')-b''\,(ac'-ca')}.$$

In fine colle due equazioni di condizione

$$bm+b'n=b'',\qquad\qquad cm+c'n=c'',$$

si manderebbero via i termini moltiplicati per y e per z, e verrebbe

$$x=\frac{d\,(c'\,b''-b'\,c'')+d'\,(bc''-cb'')-d''\,(bc'-cb')}{a\,(c'\,b''-b'\,c'')+a'\,(bc''-cb'')-a''\,(bc'-cb')}.$$

Sviluppando questi valori ed ordinandoli per modo che i termini siano alternativamente positivi e negativi, e cangiando nel tempo stesso i segni del numeratore e del denominatore nel primo e nel terzo, si potranno porre sotto le forme seguenti:

$$z=\frac{ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$y=\frac{ad'c''-ac'd''+ca'd''-da'c''+dc'a''-cd'a''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''},$$

$$x=\frac{db'c''-dc'b''+cd'b''-bd'c''+bc'd''-cb'd''}{ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''}.$$

87. Siano le quattro equazioni

$$\begin{aligned} a\ x+b\ y+c\ z+d\ u&=e\\ a'\ x+b'\ y+c'\ z+d'\ u&=e'\\ a''x+b''y+c''z+d''u&=e''\\ a'''x+b'''y+c'''z+d'''u&=e''' ;\end{aligned}$$

si moltiplicherà la prima per m, la seconda per n e la terza per p, e si sommeranno i prodotti; poi togliendo dal risultamento la quarta, si troverà

$$\begin{aligned}&(am+a'n+a''p-a''')\,x+(bm+b'n+b''p-b''')\,y\\ &+(cm+c'n+c''p-c''')\,z+(dm+d'n+d''p-d''')\,u\\ &=em+e'n+e''p-e'''.\end{aligned}$$

Per ottenere u, si farà

$$\begin{aligned} am+a'n+a''p&=a''',\\ bm+b'n+b''p&=b''',\\ cm+c'n+c''p&=c''',\end{aligned}$$

e verrà

$$u=\frac{em+e'n+e''p-e'''}{dm+d'n+d''p-d'''}.$$

Dunque, in virtù delle equazioni precedenti le quali determinano i fattori m, n, p, il caso di quattro incognite è ridotto a quello di tre. Bisogna osservare intanto che le lettere d ed e non entrando affatto nelle tre dette equazioni, non potranno neanche entrare in modo alcuno nei valori di m, n, p; dalla quale osservazione evidentemente risulta che il *numeratore dell' espressione di* u *si ricava dal denominatore col solo cangiare le* d, *che sono i coefficienti di questa incognita*, *nelle* e *corrispondenti*, *che sono i termini interamente noti delle equazioni proposte*.

Questa legge, che avremmo di già potuto scorgere nei numeri 85 ed 86, si estende a tutte le incognite, qualunque ne sia il numero. In quanto al di loro denominatore, l' osservazione dei risultamenti ottenuti precedentemente, porge il mezzo di trovarli senza calcolo.

88. Per risalire al primo anello della catena, prendo l' equazione ad un' incognita $ax = b$, e ne traggo

$$x = \frac{b}{a};$$

in cui si vede che il numeratore è il termine noto b, ed il denominatore, il coefficiente a dell' incognita.

Le due equazioni

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c'$$

hanno dato

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}, \qquad y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'};$$

e qui pure il denominatore è composto delle lettere a, a', b, b', che moltiplicano le incognite: si scriva da prima la lettera a allato alla lettera b, il che dà ab; indi si scambino di posto le lettere a e b per avere ba, ed avanti a questa disposizione si ponga il segno $-$; per tal modo si avrà $ab - ba$; finalmente si metta un accento sulla seconda lettera di ciascun termine: ed ecco formato il denominatore $ab' - ba'$.

Ciò fatto, seguendo l' osservazione colla quale termina il numero precedente, si comporrà il numeratore di x, cangiando le a in c, e quello di y, le b in c; di questa maniera si trova che l' uno è $cb' - bc'$, e l' altro $ac' - ca'$.

V' è uopo di maggiore attenzione per iscoprire la formazione del denominatore nelle equazioni a tre incognite. Ciò non ostante, poichè nel caso di due incognite il denominatore presenta tutte le disposizioni possibili delle due lettere a e b che moltiplicano queste incognite, è naturale il pensare che quando vi sono tre incognite, il loro denominatore debba contenere tutte le disposizioni diverse delle tre lettere a, b, c; e per formare queste disposizioni con ordine, bisogna procedere nel modo seguente.

Si comincerà dal formare le disposizioni $ab - ba$ delle due lettere a e b; poi di seguito alla prima disposizione ab si scriverà la terza lettera c, il che darà abc; e facendo passare questa lettera per tutti i posti, coll'avvertenza di cangiare ogni volta il segno e di non turbare l'ordine respettivo di a e di b, ne risulterà

$$abc - acb + cab.$$

Operando nel modo stesso sulla seconda disposizione $-ba$ delle due lettere, si troverà

$$-bac + bca - cba;$$

e riunendo questi prodotti ai tre precedenti, e poi scrivendo sulla seconda lettera un accento e sulla terza due, emergerà

$$ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'',$$

risultamento conforme a quello che presentano le formole ottenute immediatamente.

Da ciò che precede si deduce facilmente, che per formare il denominatore nel caso di quattro incognite, bisognerebbe introdurre la lettera d in ciascuno dei sei prodotti

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba,$$

e farle occupare successivamente tutti i posti; il prodotto abc, per esempio, darebbe i quattro seguenti:

$$abcd - abdc + adbc - dabc.$$

Operando similmente sopra i cinque altri prodotti delle tre lettere a, b, c, il risultamento totale avrebbe ventiquattro termini, in ciascuno dei quali la seconda lettera porterebbe un accento, la terza due, e la quarta tre. I numeratori delle

incognite u, z, y, x si otterrebbero colla regola enunciata più sopra, cioè scrivendo nel denominatore in luogo del coefficiente dell'ignota che si cerca, il termine noto (*).

89. Per piegare le ottenute formole alla risoluzione delle equazioni numeriche, bisognerà paragonare termine a termine le equazioni proposte con le equazioni generali dei numeri precedenti.

Per risolvere, a cagion d'esempio, le tre equazioni

$$7x + 5y + 2z = 79,$$
$$8x + 7y + 9z = 122,$$
$$x + 4y + 5z = 55,$$

sarà d'uopo comparare, termine a termine, queste equazioni colle tre del numero 86, e pareggiare i coefficienti dei termini analoghi, il che darà

$$a = 7,\quad b = 5,\quad c = 2,\quad d = 79,$$
$$a' = 8,\quad b' = 7,\quad c' = 9,\quad d' = 122,$$
$$a'' = 1,\quad b'' = 4,\quad c'' = 5,\quad d'' = 55.$$

Sostituendo questi valori nelle espressioni generali delle incognite x, y e z, ed eseguendo le operazioni indicate, si troverà

$$x = 4,\quad y = 9,\quad z = 3.$$

E qui molto importa l'osservare che le stesse espressioni servirebbero ancora, quando le equazioni proposte non avessero tutti i loro termini affetti dal segno $+$, come sembra che lo suppongano le equazioni generali, dalle quali queste espressioni sono state dedotte. Se, per esempio, si avesse

$$3x - 9y + 8z = 41$$
$$-5x + 4y + 2z = -20,$$
$$11x - 7y - 6z = 37,$$

(*) Laplace nella seconda parte delle Memorie dell'Accademia delle Scienze per l'anno 1772 pag. 294, ha dimostrato queste regole *a priori*. Si veggano altresì gli *Annali delle Matematiche pure ed applicate* del Signor Gergonne, T. IV, pag. 148, e T. XII, pag. 281.

nel paragonare i termini di queste equazioni ai loro corrispondenti nelle equazioni generali, bisognerebbe tener conto dei segni, il che darebbe

$$a=+3,\quad b=-9,\quad c=+8,\quad d=+41,$$
$$a'=-5,\quad b'=+4,\quad c'=+2,\quad d'=-20$$
$$a''=+11,\quad b''=-7,\quad c''=-6,\quad d''=+37,$$

e poi determinare, conformemente alle regole del numero 31, il segno che deve avere ciascun termine delle espressioni generali di x, y, z, dipendentemente dai segni dei fattori di cui è composto. In tal modo si troverebbe che il primo termine del denominatore comune, il qual termine è $ab'c''$, diventando $+3\times+4\times-6$, cangia di segno, e produce -72; ed usando della medesima avvertenza riguardo agli altri termini, sì dei numeratori, che dei denominatori, e prendendo da una parte la somma dei termini positivi, e dall'altra quella dei termini negativi, si troverà

$$x=\frac{2774-2834}{592-622}=\frac{-60}{-30}=+2,$$

$$y=\frac{3022-2932}{592-622}=\frac{+90}{-30}=-3,$$

$$z=\frac{3859-3889}{592-622}=\frac{-30}{-30}=+1.$$

Delle equazioni del secondo grado ad una sola incognita.

90. Nelle equazioni di cui ho trattato fin qui, le incognite non si elevavano che alla prima potenza, e non erano moltiplicate tra loro: queste equazioni insomma non erano che del *primo grado;* ma se fosse proposta la semplicissima quistione seguente: *Trovare un numero tale, che essendo moltiplicato pel suo quintuplo, il prodotto sia uguale a 125*, rappresentando questo numero con x, il suo quintuplo sarebbe $5x$, e si avrebbe

$$5x^2=125.$$

Questa equazione è del *secondo grado*, perchè essa contiene x^2, ovvero la seconda potenza dell' incognita. Se si libera questa seconda potenza dal suo coefficiente 5, si otterrà

$$x^2 = \frac{125}{5}, \quad \text{ovvero} \quad x^2 = 25.$$

Non si saprebbe qui trovare l' incognita x come nel numero 11, e la quistione proposta è solamente ridotta a rintracciare un numero il quale, moltiplicato per sè stesso, dia 25. Con lieve riflessione però si scorge che questo numero è 5; ma assai raramente avviene che si possa con la stessa facilità indovinare la soluzione cercata: siamo dunque pervenuti a questa nuova quistione numerica: *trovare un numero il quale, moltiplicato per sè stesso, dia un prodotto uguale ad un numero proposto*, ovvero, ciò ch'è lo stesso, ritornare dalla seconda potenza al numero che l' ha prodotta, il quale si chiama di lei *radice quadrata*. Passo subito ad occuparmi della risoluzione di cotesta quistione, perchè essa servirà a determinare le incognite in tutte le equazioni del secondo grado.

91. Il metodo che bisogna adoperare per trovare o *estrarre* la radice dai numeri, suppone che si sappiano le seconde potenze di quelli che sono espressi da una sola cifra: ecco dunque i nove primi numeri con le loro seconde potenze scritte al di sotto di ciascuno:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Si vede per questa tavola che la seconda potenza d' un numero di una sola cifra, non ne contiene più di due: 10, che è il più piccolo tra i numeri di due cifre, ne ha tre al suo quadrato 100. Per prepararsi a scomporre la seconda potenza d' un numero espresso da due cifre, bisogna dapprima studiarne la formazione; e però io m' accingo a scoprire di qual maniera ciascuna parte del numero 47, per esempio, concorra alla formazione del quadrato di questo numero.

Si può scomporre 47 in $40 + 7$, cioè in 4 decine e 7 unità; e rappresentando con a le decine del numero proposto, e con b le unità di lui, la seconda potenza di siffatto numero sarà espressa da

$$(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2;$$

vale a dire che detta potenza conterrà tre parti, cioè: *il qua-*

drato delle decine, due volte il prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità. Nell'esempio che ho scelto, $a = 4$ decine ovvero 40 unità, $b = 7$; e si avrà

$$a^2 = 1600$$
$$2ab = 560$$
$$b^2 = 49$$

Totale, $a^2 + 2ab + b^2 = 2209 = 47 \times 47$.

Per ritornare ora dal numero 2209 alla sua radice 47, si osserverà in primo luogo che il quadrato delle decine, 1600, non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle centinaja, e che esso è il massimo quadrato che possano contenere le 22 centinaja di 2209; poichè 22 cade tra 16 e 25, vale a dire tra il quadrato di 4 e quello di 5, siccome 47 si trova tra 4 decine ovvero 40, e 5 decine o sia 50.

Se dunque si cerca il massimo quadrato contenuto in 22, si troverà 16, di cui la radice 4 esprimerà le decine di quella di 2209: togliendo in seguito 16 centinaja, ovvero 1600, da 2209, il resto 609 conterrà il doppio prodotto 560 delle decine per le unità, ed il quadrato 49 delle unità. Ma il doppio prodotto delle decine per le unità, non avendo cifre d'un ordine inferiore alle decine, deve trovarsi nelle due prime cifre 60 del resto 609, il quale conterrà inoltre le decine provvenienti dal quadrato delle unità. Intanto, se si divide 60 per 8, che è il doppio delle decine, si avrà, trascurando il resto, un quoziente 7 uguale alle unità cercate. Moltiplicando in seguito il numero 8, riguardato come decine, per 7, si formerà il doppio prodotto 560 delle decine per le unità, e dal resto totale 609 togliendo questo numero, si otterrà una differenza 49, che dev'essere, e che è di fatto il quadrato delle unità.

L'operazione ritrovata col ragionamento si dispone così:

```
22,09 | 47
16    | 87
-----
60,9
60 9
-----
00 0.
```

Si scrive il numero proposto come se si trattasse di dividerlo per un altro, e si destina alla radice il luogo che dovrebbe occupare il divisore. In seguito si separano con una

virgola le unità e le decine, per non considerare che le due prime cifre sulla sinistra, che debbono contenere il quadrato delle decine della radice. Si cerca il massimo quadrato 16, contenuto in queste due cifre; se ne porta la radice 4 al luogo che l'è stato destinato, e si toglie 16 da 22. A fianco al resto 6 si abbassano le due altre cifre, 09, del numero proposto; si separa l'ultima che non entra nel doppio prodotto delle decine per le unità; si divide la parte che resta a sinistra per 8, doppio delle decine della radice, il che dà per quoziente le unità 7; e per formare ad un sol tratto le due ultime parti del quadrato contenute in 609, si scrive 7 allato ad 8, dal che resulta il numero 87, uguale al doppio delle decine più le unità, ovvero a $2a + b$, il quale, essendo moltiplicato per 7 o sia per b, riproduce $609 = 2ab + b^2$, ovvero il doppio prodotto delle decine per le unità, più il quadrato delle unità: facendo la sottrazione, il residuo è nullo; ed essendo terminata l'operazione, si scorge chiaramente che 47 è la radice quadrata di 2209.

Si debba ancora estrarre la radice quadrata da 324; io dispongo l'operazione come segue:

3,24	18
1	
22.4	28
22 4	
00 0	

e dietro ciò che s'è detto, trovo 1 per le decine della radice; queste decine essendo raddoppiate, mi danno il numero 2, pel quale bisogna dividere le due prime cifre 22 del resto.

Ora 22 contiene 2 undici volte, e non solamente non si può avere alla radice, nè più di 10, nè 10, ma 9 stesso sarebbe troppo grande nel caso attuale; poichè scrivendo 9 a fianco di 2, e moltiplicando 29 per 9, siccome prescrive la regola, si avrebbe per risultamento 261, che non si potrebbe togliere da 224. Non si deve dunque riguardare la divisione di 22 per 2 che come un mezzo approssimativo per trovare le unità, e bisogna diminuire il quoziente ottenuto, finchè si pervenga ad un prodotto che non sorpassi il resto 224, condizione che è soddisfatta dal numero 8, poichè $8 \times 28 = 224$; dunque la radice cercata è 18.

Formando le tre parti del quadrato di 18 , si trova

$$\begin{aligned} a^2 &= 100 \\ 2ab &= 160 \\ b^2 &= \;\;64 \\ \hline \text{Totale} \quad 324 &= 18 \times 18 , \end{aligned}$$

e si vede che le 6 decine provvenienti dal quadrato delle unità essendo riunite a 160 , doppio prodotto delle decine per le unità , alterano questo prodotto , di maniera che la divisione pel doppio delle decine non può dare le unità sole.

92. Dietro ciò che precede , non potrebbe incontrarsi difficoltà nell'estrazione della radice quadrata da un numero di tre o di quattro cifre , ma bisognano ancora alcune particolarità per mettere il lettore nello stato di estrarre la radice da un numero espresso da quante cifre si vorrà , particolarità che si ricaveranno dai principî di già stabiliti.

Ogni numero al di sotto di 100 non avrà più di quattro cifre al suo quadrato, poichè quello di 100 è 10000, ovvero il più piccolo numero espresso da cinque cifre. Ciò posto, per esaminare la formazione del quadrato di un numero al di sopra di 100, di 473, per esempio , si potrà questo numero scomporre in $470+3$, ovvero 47 decine, più 3 unità ; e per dedurre il suo quadrato dalla formola

$$a^2+2ab+b^2 ,$$

si farà $a=47$ decine $=470$ unità , $b=3$ unità , e di qui

$$\begin{aligned} a^2 &= 220900 \\ 2ab &= \;\;\;2820 \\ b^2 &= \;\;\;\;\;\;\;\;9 \\ \hline \text{Totale} \quad 223729 &= 473 \times 473. \end{aligned}$$

Si vede in quest'esempio che il quadrato delle decine non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle centinaja, e ciò deve essere in generale, perciocchè decine moltiplicate per decine producono sempre centinaja (*Arit.* 32).

Bisogna dunque cercare il quadrato delle decine nella parte 2237 che resta sulla sinistra del numero proposto , dopo che ne sono state separate le decine e le unità ; e siccome 473 cade tra 47 decine , o sia 470 , e 48 decine, o sia 480 , così 2237 deve cadere tra il quadrato di 47 e quello di 48 ; donde se-

gue che il massimo quadrato contenuto in 2237 sarà quello di 47, cioè delle decine della radice. È evidente che per trovare queste decine, bisogna operare come se si volesse estrarre la radice quadrata da 2237; ma invece di pervenire ad un risultamento esatto, si troverà un resto contenente le centinaja formate dal doppio prodotto delle 47 decine moltiplicate per le unità.

Per effettuare il calcolo, si dispone l'operazione come si vede qui:

```
22,3 7,2 9 | 473
16         |
---------- | ---
 6 3,7     | 87
 6 0 9     | 943
----------
   2 8 2,9
   2 8 2 9
----------
   0 0 0 0.
```

Si separano in primo luogo le due ultime cifre 29, e per estrarre la radice dal numero 2237 che resta sulla sinistra, si separano ancora le due ultime cifre 37 di questo numero; di questa maniera il numero proposto resta diviso in classi di due cifre, progredendo da dritta a sinistra. Si opera sulle prime due classi come si è fatto nel paragrafo precedente sul numero 2209, il che dà le due prime cifre 47 della radice; ma si trova un resto 28, il quale unito alle due cifre 29 dell'ultima classe, contiene il doppio del prodotto delle 47 decine per le unità, ed il quadrato delle unità. Si separa la cifra 9, che non può far parte del doppio prodotto delle decine per le unità, e si divide 282 per 94, doppio delle 47 decine; scrivendo il quoziente 3 a fianco a 94, e moltiplicando 943 per 3, si ottiene 2829, numero precisamente uguale all'ultimo resto, e l'operazione è terminata.

93. Per mostrare la maniera di operare sopra un numero qualunque, passo ad estrarre la radice da 22391824. La radice cercata, qualunque essa sia, può sempre concepirsi divisa in decine ed in unità, come negli esempi precedenti. Il quadrato delle decine non avendo alcuna cifra significativa d'un ordine inferiore alle centinaja, le due ultime cifre 24 non potranno entrarvi; si separeranno dunque, e la quistione sarà ridotta dapprima a cercare il massimo quadrato contenuto nella parte 223918, che rimane a sinistra. Essendo questa parte composta di più di due cifre, bisogna conchiudere che il numero

che esprime le decine della radice cercata, ne ha più d'una; può dunque anch' esso scomporsi in decine ed in unità. Il quadrato di queste decine non entrando nelle due ultime cifre 18 della parte 223918, bisognerà cercarlo nelle cifre 2239 che sono a sinistra; e poichè 2239 ha pure più di due cifre, il quadrato che esso deve contenere ne terrà almeno due alla sua radice; il numero che esprime le decine che si cercano, avrà dunque più d'una cifra: in fine bisognerà in 22 cercare il quadrato di quello che rappresenta le unità dell' ordine il più elevato della radice domandata. Con questa serie di ragionamenti, che si può spingere quanto lontano si vorrà, il numero proposto si troverà diviso in classi di due cifre andando da dritta a sinistra; e giova frattanto d'essere prevenuto che l' ultima classe a sinistra potrà contenere ancora una sola cifra, il che accaderà tutte le volte che il numero delle cifre sarà dispari.

Il numero proposto essendo così diviso in classi, e disposto come si vede qui, si opera sulle tre prime classi come nell'esempio del numero precedente; ed allorchè si son trovato le tre prime cifre 473, allato all'ultimo resto 189 si abbassa la quarta classe 24, e si considera il numero 18924, come contenente il doppio prodotto delle 473 decine trovato per le unità cercate, più il quadrato di queste unità. Si separa l'ultima cifra 4; si dividono quelle che restano a sinistra per 946, doppio di 473, e si fa in seguito la verifica del quoziente 2, come nelle operazioni precedenti.

```
22,3 9,18,24 | 4732
16           | ----
------       | 87
 6 3,9       | 943
 6 0 9       | 9462
-------------
    3 0 1,8
    2 8 2 9
    ---------
      1 8 9 2,4
      1 8 9 2 4
      ---------
      0 0 0 0 0.
```

Finisce qui l' operazione in quest' esempio; ma non riesce difficile a vedere che se vi fosse un' altra classe di più, le quattro cifre trovate 4732 esprimerebbero le decine d'una radice di cui si cercherebbero le unità, e che per conseguenza bisognerebbe dividere il resto che si avrebbe allora, più la prima cifra della classe seguente, pel doppio di queste decine, e così di seguito per ciascuna delle classi che si abbasserebbe successivamente.

94. Se avvenisse che dopo di avere abbassata una classe, il resto, unito alla prima cifra di questa classe, non contenesse il doppio delle cifre trovate, bisognerebbe mettere 0 alla radice; poichè, allora, la radice non avrebbe unità di quest' ordine: si abbasserebbe in seguito la coppia seguente per continuare l' operazione come all' ordinario. L' esempio qui an-

nesso è relativo a questo caso. Non si sono scritte le quantità che si devono sottrarre, ma si sono effettuate le sottrazioni a memoria, come nella divisione.

49,4 2,0 9	703
0 4,2 0,9	1403
0 0 0 0	

95. Non tutt'i numeri sono quadrati perfetti. Facendo attenzione sulla tavola della pagina 113, si vede che tra i quadrati di ciascuno dei nove primi numeri esistono delle lacune che comprendono parecchi numeri che non hanno radice; 45, per esempio, non è un quadrato, poichè cade tra 36 e 49. Il più delle volte avverrà che il numero di cui si domanderà la radice quadrata, non ne avrà, almeno in numero intero; ma operando come se esso ne avesse una, il risultamento sarà la radice del massimo quadrato che esso contiene. Se si cerca, per esempio, la radice di 2276, si troverà 47, e resterà 67, il che indica che il massimo quadrato contenuto in 2276 è quello di 47, ovvero 2209.

Siccome si potrebbe dubitare, dopo di aver trovata la radice del massimo quadrato contenuto in un numero, di avere messo qualche cifra troppo piccola alla radice, ecco un mezzo di riconoscere se il resto è troppo grande, e se la radice trovata è troppo piccola. Il quadrato di $a+b$ essendo

$$a^2+2ab+b^2,$$

se si fa $b=1$, il quadrato di $a+1$ sarà

$$a^2+2a+1,$$

quantità che differisce da a^2, quadrato di a, del doppio di a, più l'unità. *Dunque se la radice trovata dovesse essere aumentata dell'unità o di più dell'unità, bisognerebbe che il suo quadrato, tolto dal numero proposto, lasciasse un resto almeno uguale a due volte questa radice, più l'unità.* Tutte le volte che questa circostanza non avrà luogo, la radice estratta sarà in effetti quella del massimo quadrato contenuto nel numero proposto.

96. Poichè per moltiplicare una frazione per una frazione, bisogna moltiplicare i numeratori tra loro, ed i denominatori tra loro, è evidente che il prodotto di una frazione per sè stessa, ovvero *il quadrato d'una frazione, è uguale al quadrato del suo numeratore, diviso pel quadrato del suo denominatore.* Segue da ciò, che *per estrarre la radice quadrata da una frazione*, bisogna estrarre quella del suo numeratore e quella del suo denominatore. Così la radice di $\frac{25}{64}$ è $\frac{5}{8}$, perchè 5 è la radice quadrata di 25, ed 8 quella di 64.

È cosa importantissima a notare, che non solamente i quadrati delle frazioni propriamente dette sono sempre frazioni, ma che *ogni numero frazionario irriducibile, essendo moltiplicato per sè stesso, darà sempre un risultamento frazionario anche irriducibile.*

97. Questa proposizione riposa sopra di quest'altra. *Ogni numero primo* P, *che divide il prodotto* AB *di due numeri* A *e* B, *divide necessariamente uno di questi numeri.*

Io suppongo ch'esso non divida B, e che B lo sorpassi; dinotando con q il quoziente intero di questa divisione, e con B' il resto, si avrà

$$B = qP + B',$$

da cui, moltiplicando per A, si dedurrà

$$AB = qAP + AB',$$

e dividendo i due membri di quest'equazione per P, si otterrà

$$\frac{AB}{P} = qA + \frac{AB'}{P};$$

da cui risulta che la divisibilità di AB per P porta per conseguenza quella del prodotto AB' pel medesimo numero. Ora B' essendo il resto della divisione di B per P, è necessariamente minore di P: così non potendo dividersi B' per P, si dividerà P per B', e si avrà un quoziente q' ed un resto B''; poi si dividerà P per B'', e si avrà un quoziente q'' ed un resto B''', e così di seguito, poichè P è un numero primo.

Ciò posto, si avrà questa serie di equazioni $P = q'B' + B''$, $P = q''B'' + B'''$, ec.; moltiplicando ciascun membro per A, si otterrà

$$AP = q'AB' + AB'', \quad AP = q''AB'' + AB''', \quad \text{ec.};$$

e dividendo per P, verrà

$$A = q'\frac{AB'}{P} + \frac{AB''}{P}, \quad A = q''\frac{AB''}{P} + \frac{AB'''}{P}, \quad \text{ec.},$$

risultamenti i quali fanno vedere che essendo AB' divisibile per P, i prodotti AB'', AB''', ec. devono esserlo ancora. Ma

i resti B', B'', B''', ec. diventano sempre più piccoli di mano in mano, e si deve finalmente cadere sull' unità; imperocchè le operazioni indicate qui sopra si continuano della stessa maniera sino a che questi resti sorpassano 1, essendo P un numero primo; e quando si giungerà all' unità, si avrà il prodotto $A \times 1$, il quale dev'essere divisibile per P: dunque ancora A deve essere divisibile per P.

Segue da ciò, che se il numero primo P, che per ipotesi non divide B, non dividesse neppure A, esso non dividerà neanche il prodotto di questi numeri.

(*Questa dimostrazione è ad un dipresso estratta dalla* Teoria dei numeri di Legendre) (*).

98. Intanto, allorchè la frazione $\frac{b}{a}$ è irriducibile, non v'è alcun numero primo che potesse dividere ad un tempo b ed a; ora, in virtù di ciò che precede, ogni numero primo che non divide a, non può dividere $a \times a$, ossia a^2; ogni numero primo che non divide b, non divide $b \times b$, ovvero b^2: i numeri a^2 e b^2 sono dunque allora primi tra loro; e per conseguenza il quadrato $\frac{b^2}{a^2}$ della frazione $\frac{b}{a}$, essendo irriducibile al pari di questa frazione, non potrebbe essere un numero intero.

99. Da quest'ultima proposizione risulta, che *tutti i numeri interi, che non sono quadrati perfetti, non hanno radice, non solamente in numeri interi, ma neanche in numeri frazionari.* Non ostante ciò è naturale accorgersi che debba esistere una quan-

(*) È facile a vedere che la proposizione qui sopra dimostrata si estende ad un prodotto composto da quanti fattori ai vorrà, e che se questi fattori sono tutti numeri primi, il prodotto non può esser diviso da alcun altro numero primo, ciò che prova che la decomposizione d'un numero in fattori semplici (*Arit.* 162) non potrebbe effettuarsi che d'una sola maniera.

Di più, un nnmero composto non potendo dividere un altro numero, aenza che questo sia divisibile sncecessivamente per ciascun fattore semplice del primo, ne segue che ogni numero composto che è primo con uno dei fattori d'un prodotto AB, non dividerà questo prodotto, se non quando dividerà l'altro fattore.

Ciò prova la proposizione ennnciata nel n.° 59 dell'*Aritmetica*, che ogni frazione i cui termini sono primi tra loro, è irreducibile; imperocchè sia $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$; se ne dedurrà $d = \frac{bc}{a}$; e se a e b sono primi tra loro, perchè d sia intero, bisognerà che a divida c, il che snppone $c =$, o $> a$, e di qui risulta $d =$, o $> b$.

tità la quale, moltiplicata per sè stessa, produca un numero qualunque, 2276, per esempio, e che in questo caso, una tal quantità sia compresa tra 47 e 48; poichè 47×47 dà un prodotto più piccolo di questo numero, 48×48 ne dà uno più grande; e dividendo l'intervallo che passa tra 47 e 48 in frazioni, si trovano numeri i quali moltiplicati per sè stessi, danno prodotti più grandi del quadrato di 47, più piccoli di quello di 48, prodotti i quali di mano in mano si approssimano sempre di più al numero 2276.

L'estrazione della radice quadrata, applicata ai numeri che non sono quadrati perfetti, dà dunque origine ad una nuova specie di quantità, nella guisa stessa che la divisione genera le frazioni; ma vi è questa differenza tra le frazioni e le radici de' numeri che non sono quadrati perfetti, cioè, che le prime, le quali si compongono sempre d'un numero esatto di parti dell'unità, hanno con questa unità una *comune misura*, ovvero un rapporto espresso da numeri interi, e che le seconde ne sono affatto prive.

Concependo, per esempio, divisa l'unità in cinque parti uguali, il quoziente della divisione di 9 per 5 si esprime con 9 di queste parti, ossia con $\frac{9}{5}$; così $\frac{1}{5}$ essendo contenuto cinque volte nell'unità e nove volte in $\frac{9}{5}$, è la *comune misura* dell'unità e della frazione $\frac{9}{5}$, ed il rapporto di queste quantità è quello dei numeri interi 5 e 9.

Considerando che tanto i numeri interi quanto le frazioni hanno con l'unità una comune misura, si dice che queste quantità sono *commensurabili* con l'unità, o semplicemente *commensurabili*; e perchè i loro *rapporti*, o *ragioni* con l'unità sono espressi da numeri interi, si distinguono ancora sì i numeri interi che le frazioni col nome comune di *numeri razionali*.

Al contrario la radice quadrata d'un numero che non è un quadrato perfetto, è *incommensurabile o irrazionale*, perchè, non potendo essere rappresentata da alcuna frazione, se ne inferisce che in qualunque numero di parti si supponga divisa l'unità, nessuna sarà tanto piccola da misurare nello stesso tempo, d'una maniera esatta, questa radice e l'unità.

Per indicare in generale una radice da estrarsi, sia che possa ottenersi esattamente, sia che no, si fa uso del segno $\sqrt{}$

che si chiama *radicale* ;

$\sqrt{16}$ è la medesima cosa che 4,

$\sqrt{2}$ è *incommensurabile* o *irrazionale*.

100. Sebbene la quantità $\sqrt{2}$ non possa esprimersi esattamente con alcun numero intero o frazionario, pure si ottiene di questa quantità un' espressione approssimata per quanto si vuole, convertendo il numero dato 2 in frazione di cui il denominatore sia un quadrato ; e la radice del numeratore, presa solamente in numero intero, dà quella del numero proposto, espressa in parti della specie dinotata dalla radice quadrata del denominatore.

Se si trasforma, per esempio, il numero 2 in 25^{esimi}, si avrà $\frac{50}{25}$. La radice di 50 essendo 7 in numero intero, e quella di 25 essendo esattamente 5, si avrà $\frac{7}{5}$, ovvero $1\frac{2}{5}$, per la radice di 2, approssimata a meno d' un quinto.

101. Si vede che questa operazione, fondata sopra ciò che si è appreso nel numero 96, che il quadrato, cioè, d'una frazione era espresso da una nuova frazione che aveva per numeratore il quadrato del numeratore primitivo, e per denominatore il quadrato del denominatore primitivo, si applica a qualunque specie siasi di frazioni, e più facilmente ancora alle decimali che a tutte le altre. In fatti segue dal suddetto principio che il quadrato d' un numero espresso in decimi, deve esserlo in centesimi, che quello d' un numero espresso in centesimi, deve esserlo in diecimillesimi, e così di seguito ; e che per conseguenza *il numero delle cifre decimali del quadrato è sempre doppio di quello della radice.* Quest' ultima osservazione può ancora dedursi dal principio della moltiplicazione dei numeri decimali, il quale richiede che un prodotto deve contenere tante cifre decimali, quante sono quelle di entrambi i fattori. Nel caso attuale il numero proposto, considerato come il prodotto della sua radice moltiplicata per sè stessa, deve avere il doppio delle cifre decimali di questa radice.

Dopo che si sarà ben compreso ciò che precede, facilmente se ne conchiuderà, che volendo, per esempio, la radice quadrata di 227 approssimata fino ai centesimi, bisognerà ridurre questo numero a diecimillesimi, cioè a dire, aggiungere quat-

tro zeri a dritta, il che darà 2270000 diecimillesimi, da cui si estrarrà la radice come da un egual numero di unità; ma per dinotare che il risultamento dev'essere di centesimi, si separeranno con una virgola le due ultime cifre sulla dritta. Si troverà così, che la radice di 227, approssimata sino ai centesimi circa, è 15,06; eccone qui l'operazione:

2,2 7,00,00	1506
1 2,7	25
200 0,0	3006
1 96 4	

Se il numero proposto contenesse di già decimali, bisognerebbe renderne pari il numero, siccome lo richiede l'estrazione della radice dai decimali. Per estrarre, a cagion d'esempio, la radice da 51,7, si metterebbe un zero appresso a questo numero, affinchè avesse almeno centesimi, e si estrarrebbe di poi la radice da 51,70. Se si volesse avere un decimale di più, si metterebbero due zeri di più appresso a questo numero, il che formerebbe 51,7000, e si troverebbe 7,19 per sua radice.

Coloro che vorranno esercitarsi, potranno cercare la radice quadrata dei numeri 2 e 3 con sette cifre decimali, il che richiederà che dessi mettano quattordici zeri appresso a questi numeri; e dovranno trovare per risultamento

$$\sqrt{2} = 1,4142136, \quad \sqrt{3} = 1,7320508.$$

102. Allorchè si è trovato più della metà delle cifre che si vogliono avere alla radice, le rimanenti si possono ottenere per mezzo della sola divisione. Sia per esempio 32976; la radice quadrata di questo numero è 181 con un resto 215; dividendo questo resto 215 per 362, doppio di 181, e spingendo il quoziente fino a due decimali, si avrà 0,59, che bisognerà aggiungere a 181, e ne risulterà 181,59 per la radice di 32976, esatta a meno di un centesimo circa.

Per provare la legittimità di questo procedimento, chiamo N il numero proposto, a la radice del massimo quadrato contenuto in questo numero, e b ciò che bisogna aggiungere a questa radice per avere la radice esatta del numero proposto; si avrà, dietro queste denominazioni,

$$N = a^2 + 2ab + b^2,$$

e quindi

$$N - a^2 = 2ab + b^2;$$

e dividendo per $2a$, si troverà

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Questo risultamento fa vedere che il primo membro potrà essere preso pel valore di b, quante volte la quantità $\frac{b^2}{2a}$ sarà più piccola dell' unità dell' ordine il meno elevato che si trova in b. Ma il quadrato d' un numero non potendo avere più del doppio delle cifre di questo numero, ne segue che se il numero delle cifre di a sorpassa il doppio di quelle di b, la quantità $\frac{b^2}{2a}$ sarà allora una frazione.

Nell' esempio precedente $a=181$ unità, ovvero a 18100 centesimi, ed ha per conseguenza una cifra di più del quadrato di 59 centesimi; così la frazione $\frac{b^2}{2a}$ diviene allora $\frac{3481}{36200}$, e si trova molto al di sotto di un' unità della seconda parte 59, ossia d' un centesimo d' unità della prima.

103. Ciò conduce ad un metodo per approssimare la radice quadrata di un numero mediante le frazioni ordinarie, continuando indefinitamente il processo dell'estrazione delle radici. Ed in vero, essendo a la radice del massimo quadrato contenuto in N, b è necessariamente una frazione, e la quantità $\frac{b^2}{2a}$ essendo allora molto più piccola di b, può trascurarsi.

Sia, per esempio, da estrarsi la radice quadrata da 2; il massimo quadrato contenuto in questo numero essendo 1, dopo di avernelo tolto, resta 1. Dividendo questo resto per lo doppio della radice, si trova $\frac{1}{2}$; prendendo questo quoziente per la quantità b, viene, per una prima approssimazione della radice, $1+\frac{1}{2}$, ovvero $\frac{3}{2}$. Elevando questa radice a quadrato, si trova $\frac{9}{4}$, che, tolto da 2 ossia da $\frac{8}{4}$, darà per re-

sto $-\frac{1}{4}$. In questo caso la formola

$$\frac{N-a^2}{2a}=b+\frac{b^2}{2a}$$

diventa

$$-\frac{1}{12}=b+\frac{b^2}{2a}.$$

Prendendo $-\frac{1}{12}$ per b, verrà per la seconda approssimazione $\frac{3}{2}-\frac{1}{12}=\frac{17}{12}$; quadrando $\frac{17}{12}$, si troverà $\frac{289}{144}$, quantità che anche sorpassa 2 ovvero $\frac{288}{144}$. Sostituendo $\frac{17}{12}$ in luogo di a, risulterà

$$-\frac{1}{12\times34}=b+\frac{b^2}{2a},$$

il che darà

$$b=-\frac{1}{12\times34}=-\frac{1}{408}:$$

la terza approssimazione sarà dunque

$$\frac{17}{12}-\frac{1}{12\times34}=\frac{17\times34-1}{408}=\frac{577}{408}.$$

È facile di continuare quest' operazione per quanto si vorrà. Darò nel *Complemento* di questo Trattato formole più comode per estrarre le radici in generale.

104. Per approssimarci alla radice quadrata d' una frazione, l' idea che si presenta la prima, è di estrarre per approssimazione la radice quadrata dal numeratore e dal denominatore; ma riflettendovi un poco, si vedrà bentosto che può evitarsi una di queste operazioni, facendo in modo che il denominatore sia un quadrato perfetto, il che si ottiene moltiplicando i due termini della frazione proposta per questo denominatore. Se si avesse, per esempio, ad estrarre la radice quadrata

da $\frac{3}{7}$, si trasformerebbe questa frazione in

$$\frac{3 \times 7}{7 \times 7} = \frac{21}{49},$$

moltiplicando i suoi due termini pel denominatore 7. La radice del numeratore di quest' ultima frazione, essendo presa in numero intero, dà $\frac{4}{7}$ per quella di $\frac{3}{7}$, e questo risultamento è approssimato per meno di $\frac{1}{7}$.

Per ottenere un maggior grado d' esattezza, bisognerebbe convertire, almeno per approssimazione, la frazione $\frac{3}{7}$ in una altra il cui denominatore fosse il quadrato di un numero più grande di 7. Si avrebbe, per esempio, a meno di $\frac{1}{15}$ circa, la radice domandata, se si convertisse $\frac{3}{7}$ in 225^{esimi}, poichè 225 è il quadrato di 15; verrebbe così $\frac{3}{7} = \frac{3 \cdot 225}{7}$ di $\frac{1}{225}$ $= 96 \times \frac{1}{225} = \frac{96}{225}$, colla differenza di meno di $\frac{1}{225}$; la radice di $\frac{96}{225}$ sta tra $\frac{9}{15}$ e $\frac{10}{15}$, ma più vicino alla seconda che alla prima frazione, perchè 96 è più vicino a 100 che ad 81: si avrebbe dunque $\frac{10}{15}$, ovvero $\frac{2}{3}$ per la radice di $\frac{3}{7}$ col divario di meno di $\frac{1}{15}$ in eccesso.

Se si volessero adoperare i decimali per estrarre la radice approssimata dal numeratore della frazione $\frac{21}{49}$, si troverebbe

4,583 per la radice approssimata del numeratore 21, e si dividerebbe questo risultamento per la radice del nuovo denominatore. Spingendo il quoziente fino a tre decimali, si avrebbe 0,655.

105. Attualmente siamo in grado di risolvere tutte le equazioni nelle quali non entra che la seconda potenza dell'incognita, combinata con quantità note.

A fare ciò basta *riunire in un solo membro tutti i termini affetti da questa potenza, poi liberarla dai suoi moltiplicatori con la regola del n.° 11: si otterrà il valore dell' incognita, estraendo la radice quadrata dall' altro membro.*

Sia, per esempio, l' equazione

$$\frac{5}{7}x^2 - 8 = 4 - \frac{2}{3}x^2.$$

Facendo sparire i divisori, si trova subito

$$15x^2 - 168 = 84 - 14x^2.$$

Trasportando nel primo membro il termine $14x^2$, e nel secondo il termine 168, verrà

$$15x^2 + 14x^2 = 84 + 168,$$

ovvero

$$29x^2 = 252,$$

ed

$$x^2 = \frac{252}{29},$$

$$x = \sqrt{\frac{252}{29}}.$$

Bisogna attentamente osservare che per indicare la radice della frazione $\frac{252}{29}$, ho fatto discendere il segno $\sqrt{\ }$ al di sotto della linea che separa il numeratore dal denominatore. Se avessi scritto $\frac{\sqrt{252}}{29}$, questa espressione avrebbe indicato il quoziente dato dalla radice quadrata del numero 252, quando essa vien divisa per 29; risultamento differente dal primo, nel quale la divisione dev' essere eseguita prima dell' estrazione della radice.

Sia ancora l' equazione letterale

$$ax^2 + b^3 = cx^2 + d^3 ;$$

operando come sulla precedente equazione numerica, si avrà successivamente

$$ax^2 - cx^2 = d^3 - b^3 ,$$

$$x^2 = \frac{d^3 - b^3}{a - c} ,$$

$$x = \sqrt{\frac{d^3 - b^3}{a - c}} .$$

Farò osservare in questa occasione, che quando si vuole indicare la radice quadrata di una quantità complessa, bisogna prolungare la linea superiore del radicale sopra tutta la quantità.

La radice della quantità $4a^2b - 2b^3 + c^3$ si scriverebbe così:

$$\sqrt{4a^2b - 2b^3 + c^3} ,$$

od anche in quest' altra guisa:

$$\surd(4a^2b - 2b^3 + c^3) ,$$

sostituendo alla linea superiore del radicale una parentesi che chiuda tutte le parti della quantità da cui bisogna estrarre la radice; e quest'ultima espressione può qualche volta sembrare preferibile all' altra (35).

In generale, ogni equazione del secondo grado della specie che qui esamino, potrà, mediante la trasposizione de' suoi termini, essere ridotta alla forma

$$\frac{px^2}{q} = a ,$$

$\frac{p}{q}$ denotando il coefficiente qualunque di x^2; e se ne otterrà

$$x^2 = \frac{aq}{p} ,$$

$$x = \sqrt{\frac{aq}{p}} .$$

106. Relativamente ai numeri assoluti questa soluzione è completa, perciocchè essa riducesi a praticare sul numero, sia intero, sia frazionario, rappresentato dalla quantità $\frac{aq}{p}$, un' operazione aritmetica che conduce sempre ad un risultamento o esatto, o approssimato al vero di quanto si vorrà; ma avendo riguardo ai segni dai quali le quantità possono essere affette, l' estrazione della radice quadrata lascia un' ambiguità, in conseguenza della quale ogni equazione di secondo grado è suscettibile di due soluzioni, mentre quelle di primo grado non ne hanno che una.

Ed in vero nell' equazione $x^2 = 25$ il valore di x essendo la quantità che, elevata a quadrato, produce 25, esso potrà, se si considerano le quantità algebricamente, essere affetto indifferentemente dal segno $+$, o dal segno $-$; poichè, sia che venga rappresentato da $+5$, o da -5, si avrà egualmente pel suo quadrato

$$+5 \times +5 = +25, \quad \text{o pure} \quad -5 \times -5 = +25:$$

si può dunque prendere indifferentemente

$$x = +5,$$

$$x = -5.$$

Per la stessa ragione nell' equazione generale

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

si avrà indifferentemente

$$x = +\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

$$x = -\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Per compendio si ristringono queste due espressioni nella seguente:

$$x = \pm\sqrt{\frac{aq}{p}},$$

ove il doppio segno $\pm$ indica che si può alternativamente prendere col segno $+$, o col segno $-$ il valore numerico di

$$\sqrt{\frac{aq}{p}}.$$

Dietro l'osservazione or ora fatta, si deve ritenere per regola generale, che *bisogna dare alla radice quadrata d'una quantità qualunque il doppio segno* $\pm$.

In conseguenza di questa regola si potrebbe domandare, perchè non si dà puranche ad x il doppio segno $\pm$, essendo x la radice quadrata di x^2? Si risponderà dapprima col signor Develey (*Algèbre d'Émile*, T. II), che la lettera x essendo stata posta semplicemente senza segno (cioè col segno $+$), come il simbolo dell'ignota, in questo stato propriamente bisogna determinarne il valore, e che alloraquando si cerca un numero x di cui il quadrato sia, per esempio, b, non ci sono che queste due soluzioni possibili: $x = +\sqrt{b}$, $x = -\sqrt{b}$. Inoltre ancorchè, risolvendo l'equazione $x^2 = b$, si scrivesse $\pm x = \pm \sqrt{b}$, e si combinassero questi segni in tutti i modi possibili, cioè:

$$+x = +\sqrt{b}, \qquad -x = -\sqrt{b},$$

$$+x = -\sqrt{b}, \qquad -x = +\sqrt{b},$$

non si otterrebbe niente di più, poichè cangiando il segno dei due membri della seconda equazione di ciascuna linea (57), si otterrebbe la prima.

107. Segue ancora dalla considerazione dei segni, che se il secondo membro dell'equazione generale

$$x^2 = \frac{aq}{p}$$

fosse un numero negativo, l'equazione sarebbe assurda; poichè il quadrato di una quantità o affetta dal segno $+$, o affetta dal segno $-$, essendo sempre affetto dal segno $+$, non si può trovare, nè nell'ordine delle quantità positive, nè in quello delle quantità negative, alcuna quantità il cui quadrato sia negativo.

Questa circostanza per lo appunto viene espressa allorchè

si afferma che *la radice di una quantità negativa è immaginaria.*

Se si pervenisse all' equazione

$$x^2 + 25 = 9\ ,$$

se ne dedurrebbe $\qquad x^2 = 9 - 25\ ,$

o sia $\qquad x^2 = -16\ ;$

ora non vi è alcun numero che , moltiplicato per sè stesso , potesse produrre -16. È ben vero che -4 moltiplicato per $+4$ dà -16; ma queste due quantità , avendo un segno differente , non possono essere considerate come uguali , ed il loro prodotto non è per conseguenza un quadrato. Si avranno in seguito nuovi schiarimenti sopra questa specie di contraddizione, che bisogna ben distinguere da quella del n.° 58, la quale in virtù d' un semplice cangiamento nel segno dell'incognita è scomparsa ; qui bisognerebbe cangiare il segno del quadrato x^2.

108. Una equazione del secondo grado ad una sola incognita per essere completa deve contenere tre specie di termini, cioè: termini affetti dal quadrato dell' incognita , altri affetti dall' incognita al primo grado , ed altri in fine del tutto noti: tali sono le equazioni

$$x^2 - 4x = 12\ , \qquad 4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x.$$

La prima in qualche modo è più semplice della seconda , perchè essa non contiene che tre termini , e perchè il quadrato di x vi è preso positivamente , e non ha per coefficiente che l' unità. Sotto quest' ultima forma si mettono sempre le equazioni del secondo grado prima di risolverle ; di maniera che esse allora possono essere rappresentate da questa formola generale :

$$x^2 + px = q\ ,$$

p e q designando quantità note , sia positive , sia negative.

Egli è evidente che si ridurranno tutte le equazioni del secondo grado a questo stato , 1.° passando in un sol membro tutti i termini affetti da x (10) ; 2.° cangiando il segno di ciascun termine dell' equazione per rendere positivo quello affetto da x^2, se questo termine fosse da principio negativo (57); 3.° dividendo tutti i termini dell' equazione pel moltiplicatore di x^2 , se questo quadrato ha un moltiplicatore (11) , o moltiplicandoli pel divisore di x^2, se questo quadrato è diviso (12).

Applicando ciò che si è detto all' equazione

$$4x - \frac{3}{5}x^2 = 4 - 2x,$$

allorchè si passano nel primo membro i termini affetti da x, essa diventa

$$-\frac{3}{5}x^2 + 6x = 4;$$

quando poi si cangiano i segni,

$$\frac{3}{5}x^2 - 6x = -4;$$

quando inoltre si moltiplica pel divisoro 5,

$$3x^2 - 30x = -20;$$

ed allorchè finalmente si divide pel moltiplicatore 3, diventa

$$x^2 - 10x = -\frac{20}{3}.$$

Paragonando questa equazione con la formola generale

$$x^2 + px = q,$$

si avrà per questo caso particolare

$$p = -10, \qquad q = -\frac{20}{3}.$$

109. Per conseguire la risoluzione delle equazioni così preparate, bisogna rammentarsi dell' osservazione fatta nel n.° 34, rammentarsi, cioè, che il quadrato d' una quantità composta di due termini, contiene sempre il quadrato del primo termine, il doppio del primo termine moltiplicato pel secondo, ed il quadrato del secondo termine; e che per conseguenza il primo membro dell' equazione

$$x^2 + 2ax + a^2 = b,$$

nella quale a e b sono quantità note, è un quadrato perfetto, e quello propriamente di $x+a$, dal che risulta

$$(x+a)(x+a)=b.$$

Prendendo allora la radice quadrata del primo membro, ed indicando quella del secondo, si avrà

$$x+a=\pm\sqrt{b},$$

equazione che non è più che di primo grado relativamente all'incognita x, e dà, trasportando il termine $+a$ al secondo membro,

$$x=-a\pm\sqrt{b}.$$

Un'equazione del secondo grado sarebbe dunque facilmente risoluta se fosse ridotta alla forma

$$x^2+2ax+a^2=b,$$

cioè a dire, se il suo primo membro fosse un quadrato.

Ma il primo membro dell'equazione generale

$$x^2+px=q$$

contiene di già due termini che possono essere riguardati come formanti parte del quadrato d'un binomio, cioè: x^2, che sarà il quadrato del primo termine x, e px, che sarà il doppio del primo moltiplicato pel secondo, il quale non può essere in conseguenza che la metà di p, ossia $\frac{1}{2}p$. Per completare il quadrato del binomio $x+\frac{1}{2}p$, vi bisognerebbe anche il quadrato del secondo termine $\frac{1}{2}p$; ma questo quadrato può essere formato, poichè p e conseguentemente $\frac{1}{2}p$ sono quantità cognite, e può in seguito essere aggiunto al primo membro, purchè si aggiunga nello stesso tempo al secondo, affine di conservare l'eguaglianza; e quest'ultimo membro rimarrà tuttavia in totalità cognito.

Il quadrato di $\frac{1}{2}p$ essendo $\frac{1}{4}p^2$, la sua aggiunzione ai due membri dell'equazione proposta

$$x^2 + px = q$$

trasforma questa equazione in

$$x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = q + \frac{1}{4}p^2,$$

risultamento di cui il primo membro è il quadrato di $x + \frac{1}{2}p$: prendendo adunque la radice dei due membri, si avrà

$$x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \quad (106),$$

e trasponendo, viene

$$x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

da cui si ottiene successivamente

$$x = -\frac{1}{2}p + \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2},$$

ed
$$x = -\frac{1}{2}p - \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}.$$

Ho dato il segno $+$ al secondo termine $\frac{1}{2}p$ della radice del primo membro dell'equazione proposta, perchè il secondo termine di siffatto membro era positivo; bisogna mettervi il segno $-$ nel caso contrario, per la ragione che il quadrato $x^2 - 2ax + a^2$ corrisponde al binomio $x - a$.

La risoluzione di una equazione qualunque di secondo gra-

do si otterrà paragonando questa equazione alla formola generale

$$x^2 + px = q;$$

o pure applicando immediatamente all'equazione proposta l'operazione che si è fatta sopra di questa formola, la quale operazione può enunciarsi come segue:

Rendere il primo membro dell' equazione proposta un quadrato perfetto, aggiungendo sì a questo, che al secondo il quadrato della metà della quantità data che moltiplica la prima potenza dell'incognita; eguagliare in seguito le radici quadrate di ciascun membro, osservando che quella del primo è composta dell' incognita e della metà della quantità data che la moltiplica nel secondo termine, presa col segno di questa quantità, e che la radice del secondo membro deve essere preceduta dal segno $\pm$, *ed indicata dal segno* $\sqrt{}$, *se essa non può ottenersi immediatamente.*

Eccone esempî.

110. *Trovare un numero tale, che aggiungendolo 7 volte al suo quadrato, la somma sia 44.*

Detto x il numero cercato, l'equazione sarà evidentemente

$$x^2 + 7x = 44.$$

Per risolverla, prendo $\frac{7}{2}$, metà del coefficiente 7 che moltiplica x, ed elevandola a quadrato, ho la quantità $\frac{49}{4}$ che aggiungo a ciascun membro, come segue:

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4} = 44 + \frac{49}{4};$$

e riducendo il secondo membro in una sola frazione, verrà

$$x^2 + 7x + \frac{49}{4.} = \frac{225}{4}.$$

La radice del primo membro è, secondo la regola data di sopra, $x + \frac{7}{2}$, e si trova per quella del secondo $\frac{15}{2}$; si

ha dunque l'equazione

$$x+\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2},$$

dalla quale si ottiene

$$x=-\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2},$$

$$x=-\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=\frac{8}{2}=4,$$

$$x=-\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{22}{2}=-11.$$

Il primo valore di x risolve la quistione nel senso del suo enunciato, poichè si ha per questo valore

$$x^2=16$$
$$7x=28$$

somma . . . . 44.

In quanto al secondo, siccome esso è affetto dal segno —, il termine $7x$, diventando

$$7\times-11=-77,$$

deve essere tolto da x^2; di maniera che l'enunciato della quistione risoluta col numero 11, è questo:

Trovare un numero tale, che togliendo 7 volte questo numero dal suo quadrato, rimanga 44.

Il valore negativo modifica dunque qui la quistione d'una maniera analoga a ciò che si è veduto per le equazioni del primo grado.

Se si mettesse in equazione l'enunciato anzidetto, si otterrebbe

$$x^2-7x=44,$$

e risolvendola , verrebbe

$$x^2-7x+\frac{49}{4}=44+\frac{49}{4},$$

$$x^2-7x+\frac{49}{4}=\frac{225}{4},$$

$$x-\frac{7}{2}=\pm\frac{15}{2},$$

$$x=\frac{7}{2}\pm\frac{15}{2},$$

$$x=\frac{7}{2}+\frac{15}{2}=\frac{22}{2}=11,$$

$$x=\frac{7}{2}-\frac{15}{2}=-\frac{8}{2}=-4.$$

Il valore negativo di x è divenuto positivo , perchè esso soddisfa letteralmente al nuovo enunciato , ed il valore positivo, che non lo soddisfa allo stesso modo , è divenuto negativo.

Da ciò si vede che nei problemi di secondo grado l'Algebra riunisce nella medesima formola due quistioni che hanno tra loro una certa analogia.

111. Qualche volta gli enunciati che conducono ad equazioni di secondo grado , sono suscettibili di due soluzioni ; il seguente si trova in questo caso.

Rinvenire un numero tale, che se si aggiunga 15 al suo quadrato , la somma sia uguale ad 8 volte questo numero.

Sia x il numero cercato ; l'equazione del problema sarà

$$x^2+15=8x.$$

Mettendo questa equazione sotto la forma prescritta nel

n° 108, si avrà

$$x^2 - 8x = -15\,,$$

$$x^2 - 8x + 16 = -15 + 16\,,$$

$$x^2 - 8x + 16 = 1\,,$$

$$x - 4 = \pm 1\,,$$

$$x = 4 \pm 1\,,$$

$$x = 5\,,$$

$$x = 3.$$

Vi sono adunque due numeri differenti 5 e 3, che godono della proprietà stabilita nell' enunciato.

112. Qualche volta s' incontrano ancora alcuni enunciati che non possono essere risoluti di alcuna maniera nel loro senso preciso, e che devono esser perciò modificati; un tal caso è quello nel quale le due radici dell' equazione sono negative, come quelle della seguente:

$$x^2 + 5x + 6 = 2.$$

Quest' equazione, la quale esprime che il *quadrato del numero cercato*, *aumentato di 5 volte questo numero*, *ed ancora di 6*, *deve dare una somma eguale a 2*, non può evidentemente essere verificata per addizione, come sta scritta, poichè il solo 6 già sorpassa 2; ed in fatti, se si risolve, si trova successivamente

$$x^2 + 5x = -4\,,$$

$$x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 4 = \frac{9}{4}\,,$$

$$x + \frac{5}{2} = \pm\frac{3}{2}\,,$$

$$x = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} = -1\,,$$

$$x^2 = -\frac{5}{2} - \frac{3}{2} = -4\,.$$

I segni — da cui sono affetti i numeri 1 e 4, fanno vedere che il termine $5x$ deve essere tolto dagli altri, ovvero che pei due ritrovati valori l'enunciato deve essere modificato così:

Trovare un numero tale, che se si tolga 5 volte dal suo quadrato, e si aggiunga 6 al resto, si abbia 2 per risultamento.

Questo enunciato dà luogo all'equazione

$$x^2 - 5x + 6 = 2,$$

dalla quale si hanno per x i due valori positivi 1 e 4.

113. Sia inoltre questo problema:

Dividere un numero p *in due parti delle quali il prodotto sia uguale a* q.

Chiamando una di queste parti x, l'altra sarà espressa da $p - x$, ed il loro prodotto sarà $px - x^2$; si avrà dunque l'equazione

$$px - x^2 = q,$$

ovvero, cangiando i segni,

$$x^2 - px = -q;$$

e risolvendo quest'ultima, si troverà

$$x = \frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}p^2 - q}.$$

Se per particolarizzare la quistione si facesse

$$p = 10, \quad q = 21,$$

si avrebbe

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21}$$

ovvero

$$x = 5 \pm 2,$$
$$x = 7,$$
$$x = 3,$$

vale a dire una delle parti sarebbe 7, e l'altra sarebbe per conseguenza 10 — 7, ovvero 3.

Se si prendesse al contrario 3 per x, l'altra parte sarebbe 10 — 3, ovvero 7; di maniera che relativamente all'enunciato attuale la quistione non ha, a parlare propriamente, che una soluzione, giacchè la seconda non è che un cambiamento d'ordine tra le parti.

L'attento esame del valore di x fa vedere che nella quistione di cui si tratta, non si possono prendere del tutto arbitrariamente i numeri p e q; poichè se q sorpassasse $\frac{p^2}{4}$, ossia il quadrato di $\frac{1}{2}p$, la quantità $\frac{p^2}{4}-q$ sarebbe negativa, e s'incorrerebbe nel carattere di assurdità osservato nel n° 107. Se si prendesse, per esempio,

$$p=10 \quad \text{e} \quad q=30,$$

verrebbe

$$x=5\pm\sqrt{25-30}=5\pm\sqrt{-5}:$$

il problema sarebbe dunque impossibile con questi dati.

114. L'assurdità delle quistioni che conducono a radici immaginarie non si manifesta che nella conchiusione; ma deve desiderarsi di conoscere con caratteri che riguardino più da vicino l'enunciato, in che consista l'assurdità del problema, dalla quale risulta quella della soluzione: or questo appunto ne sarà mostrato d'una maniera precisa dalla considerazione seguente.

Sia d la differenza delle due parti del numero proposto; la più grande sarà $\frac{p}{2}+\frac{d}{2}$, la più piccola $\frac{p}{2}-\frac{d}{2}$ (3); ora è stato chiaramente provato (29, 30 e 34) che

$$\left(\frac{p}{2}+\frac{d}{2}\right)\left(\frac{p}{2}-\frac{d}{2}\right)=\frac{p^2}{4}-\frac{d^2}{4}:$$

dunque il prodotto delle due parti del numero proposto, qualunque esse siano, sarà sempre più piccolo di $\frac{p^2}{4}$, o sia del quadrato della metà della loro somma, finchè d non sarà nullo; e quando questa circostanza avrà luogo, ciascuna di queste due parti essendo allora uguale a $\frac{p}{2}$, il loro prodotto non sarà che $\frac{p^2}{4}$.

È dunque un assurdo il volere che sia più grande; e con ragione l'Algebra, rispondendo in tal caso d'una maniera contraddittoria ai principî, mostra con ciò, che quel che si cerca, non esiste.

Quello che ora si è dimostrato sull'equazione

$$x^2 - px = -q,$$

data dalla quistione precedente, conviene a tutte quelle del secondo grado in cui q è nagativo nel secondo membro, le quali sono le sole che possono dare radici immaginarie, poichè il termine $\frac{p^2}{4}$ posto sotto il radicale, conserva sempre il segno $+$, qualunque sia quello di p. In fatti quando si avesse l'equazione

$$x^2 + px = -q, \quad \text{o sia} \quad x^2 + px + q = 0,$$

si vedrebbe subito che essa non potrebbe ammettere alcuna soluzione positiva, poichè il suo primo membro non contiene che termini addittivi; e per sapere se l'incognita x potesse essere negativa, basterebbe cangiare x in $-y$. L'incognita y avrebbe allora valori positivi, che sarebbero dati dall'equazione

$$y^2 - py + q = 0, \quad \text{o sia} \quad y^2 - py = -q,$$

precisamente la stessa che quella del numero precedente: ora i valori di x non potendo essere reali che quando quelli di y lo fossero, essi diverrebbero ancora immaginari nel caso attuale, se q sorpassasse $\frac{p^2}{4}$.

Si vede adunque in grazia delle osservazioni fatte qui sopra, come e perchè, *quando il termine noto d'una equazione di secondo grado è negativo nel secondo membro, e maggiore ad un tempo del quadrato della metà del coefficiente della prima potenza dell'incognita, quest'equazione non possa avere che radici immaginarie.*

115. Le espressioni

$$\sqrt{-b}, \quad a + \sqrt{-b},$$

ed in generale tutte quelle che comprendono la radice quadrata d' una quantità negativa, si chiamano *quantità immaginarie* (*). Queste non sono che simboli d' assurdità, i quali tengono il luogo del valore che si sarebbe ottenuto, se la quistione proposta fosse stata possibile.

Tali espressioni non si trascurano nei calcoli, perchè alle volte avviene che combinandole secondo certe leggi, l' assurdità si distrugga, ed il risultamento diventi reale. Se ne troveranno esempi nel *Complemento*.

116. Siccome importa molto ai principianti d' acquistare nozioni esatte sopra tutti i *fatti* d'analisi che sembrano uscire dalle idee comuni, ho stimato che bisognasse aggiungere di più qualche altro rischiarimento a ciò che si è di già veduto (106) sulla necessità di ammettere due soluzioni nelle equazioni del secondo grado.

Passo a dimostrare che *se esiste una quantità* a *la quale, sostituita in luogo di* x, *soddisfaccia all' equazione di secondo grado* $x^2+px=q$, *e sia per conseguenza il valore di* x, *questa incognita avrà ancora un altro valore.* In fatti, se si sostituisce a in luogo di x, ne risulterà $a^2+pa=q$; e poichè, per ipotesi, a è il valore di x, q sarà necessariamente uguale alla quantità a^2+pa: si potrà dunque scrivere questa quantità in luogo di q nell'equazione proposta, che diverrà perciò

$$x^2+px=a^2+pa.$$

Trasportando tutt' i termini del secondo membro nel primo, verrà

$$x^2+px-a^2-pa=0$$

che si può scrivere così:

$$x^2-a^2+p(x-a)=0\,;$$

ed a motivo che

$$x^2-a^2=(x+a)(x-a)\quad(34),$$

si vede a colpo d' occhio che il primo membro è divisibile per $x-a$, e dà un quoziente esatto $x+a+p$: si ha dunque, in conseguenza di ciò,

$$x^2+px-q=x^2-a^2+p(x-a)=(x-a)(x+a+p).$$

(*) Sarebbe più esatto il dire *espressioni* o *simboli immaginari*, poichè queste non sono quantità.

Ora è evidente che un prodotto è uguale a zero, allorchè uno qualunque de'suoi fattori diviene nullo; si deve dunque avere

$$(x-a)(x+a+p)=0\,,$$

non solamente quando $x-a=0$, il che dà

$$x=a\,,$$

ma ancora quando $x+a+p=0$, da cui risulta

$$x=-a-p.$$

Resta dunque provato che se a è uno de' valori di x, $-a-p$ sarà necessariamente l' altro.

Questo risultamento s' accorda coi due valori compresi nella formola

$$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}\,;$$

poichè prendendo per a il primo, $-\frac{1}{2}p+\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}$, per esempio, si troverebbe per l' altro

$$-a-p=+\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}-p=-\frac{1}{2}p-\sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

il che è in effetti la seconda radice.

Ritornerò in seguito sopra queste osservazioni le quali contengono il germe della teoria generale delle equazioni di un grado qualunque.

117. La difficoltà di mettere i problemi in equazione è pel secondo grado, ed in generale per un grado qualunque, la stessa che pel primo, e consiste sempre nella maniera di sviluppare tutte le condizioni distinte, comprese nell' enunciato, e di esprimerle per mezzo di caratteri algebrici (14). Le quistioni precedenti non offrivano alcuna difficoltà riguardo a ciò; per altro fin dal primo grado si è dovuto acquistare bastante esercizio; non ostante questo risolverò alcune quistioni che daranno luogo a parecchie utili osservazioni.

Si sono impiegati due operai, che guadagnano salari differenti; il primo essendo stato pagato al termine d'un certo numero di giorni, ha ricevuto 96 fr., ed il secondo avendo lavorato sei giorni di meno, non ha avuto che 54 fr.; se questo avesse lavorato tutti i giorni, e l'altro avesse lavorato sei giorni di meno, ciascun d'essi avrebbe ricevuto la medesima somma: si domanda quanti giorni ciascuno ha lavorato, ed il prezzo della sua giornata.

Questo problema, che a prima vista sembra contenere più incognite, si risolve facilmente con una sola incognita, perchè le altre si esprimono immediatamente per mezzo di questa.

Desiguando con x il numero de'giorni del lavoro del primo operajo, $x - 6$ sarà quello de' giorni del lavoro del secondo,

$\frac{96^{\text{fr.}}}{x}$ sarà il prezzo della giornata del primo operajo,

$\frac{54}{x-6}$ quello della giornata del secondo;

se quest'ultimo avesse lavorato per x giorni, avrebbe guadagnato

$$x \times \frac{54}{x-6}, \quad \text{ossia} \quad \frac{54x}{x-6},$$

ed il primo lavorando solamente $x - 6$ giorni, non avrebbe avuto che

$$(x-6)\,\frac{96}{x}, \quad \text{cioè} \quad \frac{96(x-6)}{x}:$$

l'equazione del problema sarà dunque

$$\frac{54x}{x-6} = \frac{96(x-6)}{x}.$$

Bisogna dapprima mandar via i denominatori da questa equazione, e viene

$$54x^2 = 96\,(x-6)(x-6);$$

i numeri 54 e 96 essendo tutti e due divisibili per 6, questo risultamento si rende più semplice, e si trova

$$9x^2 = 16(x-6)(x-6).$$

Si potrebbe preparare quest'ultima equazione secondo la regola del n° 108, per poi risolverla; ma questa regola non servendo che a facilitare l'estrazione della radice da ciascun membro dell'equazione proposta, si rende inutile in questo caso, nel quale i due membri si presentano sul bel principio sotto la forma di quadrati; perchè è patente essere $9x^2$ il quadrato di $3x$, e $16(x-6)(x-6)$ quello di $4(x-6)$: si avrà dunque a dirittura

$$3x = \pm 4(x-6);$$

donde risulta

$$3x = 4x - 24, \qquad x = 24,$$

$$3x = -4x + 24, \qquad x = \frac{24}{7}.$$

Per la prima soluzione della quistione, il primo operajo ha lavorato per lo spazio di 24 giorni, ed ha guadagnato per conseguenza $\frac{96^{\text{fr.}}}{24}$, ovvero 4 fr. per giorno, mentre il secondo non ha lavorato che 18 giorni, ed ha guadagnato $\frac{54^{\text{fr.}}}{18}$, cioè 3 fr. per giorno.

La seconda soluzione corrisponde ad un'altra quistione numerica legata all'equazione proposta d'una maniera analoga a quella che ho fatto osservare nel n° 111.

118. *Si rimettono ad un banchiere due cambiali tratte sulla stessa persona; la prima di 550 franchi pagabile in sette mesi, la seconda di 720 franchi pagabile in quattro mesi; ed egli dà in tutto una somma di 1200 franchi: si dimanda qual sia stato il frutto annuale secondo il quale queste cambiali sono state scontate.*

A fine di evitare le frazioni nelle espressioni degl'interes-

si per sette mesi e per quattro, rappresenterò con $12x$ quello che produce annualmente una somma di 100 franchi, e l'interesse d'un mese sarà allora x. Ciò posto, il valore presente della prima cambiale si otterrà facendo la proporzione

$$100 + 7x : 100 :: 550 : \frac{55000}{100 + 7x} \quad (\textit{Arit.}\ 120);$$

il valore presente della seconda cambiale risulterà ancora dalla proporzione

$$100 + 4x : 100 :: 720 : \frac{72000}{100 + 4x}.$$

Riunendo questi due valori, l'equazione del problema sarà

$$\frac{55000}{100 + 7x} + \frac{72000}{100 + 4x} = 1200.$$

Potendosi i due membri dividere per 200, si ha

$$\frac{275}{100 + 7x} + \frac{360}{100 + 4x} = 6;$$

poi facendo sparire i denominatori, si troverà successivamente

$$275(100 + 4x) + 360(100 + 7x) = 6(100 + 7x)(100 + 4x),$$
$$27500 + 1100x + 36000 + 2520x = 60000 + 6600x + 168x^2,$$

il che si riduce a

$$168x^2 + 2980x = 3500,$$

e dividendo tutto per 2, si ottiene

$$84x^2 + 1490x = 1750,$$

il che dà in fine

$$x^2 + \frac{1490}{84}x = \frac{1750}{84}.$$

Paragonando questa equazione alla formola

$$x^2+px=q,$$

verrà $$p=\frac{1490}{84},\qquad q=\frac{1750}{84},$$

e l' espressione $$x=-\frac{1}{2}p\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}+q}$$

si cangerà in $$x=-\frac{745}{84}\pm\sqrt{\frac{745\,.\,745}{84\,.\,84}+\frac{1750}{84}}.$$

Bisogna in primo luogo ridurre ad una sola le frazioni comprese sotto il radicale: si avrà

$$\frac{745\,.\,745+1750\,.\,84}{84\,.\,84}=\frac{702025}{84\,.\,84};$$

ed osservando che il denominatore di questa frazione è un quadrato perfetto, non resterà ad estrarre che la radice quadrata dal numeratore. Se si approssima ai millesimi, troverassi 837,869 per quella di 702025; e dandole il denominatore 84, i valori di x saranno

$$x=-\frac{745}{84}+\frac{837,869}{84}=\frac{92,869}{84},$$

$$x=-\frac{745}{84}-\frac{837,869}{84}=-\frac{1582,869}{84}.$$

Il primo di questi valori è il solo che risolve la quistione nel senso del di lei enunciato. Dividendo il suo denominatore per 12, si ha (*Arit.* 54)

$$12x=\frac{92,869}{7}=13,267;$$

sicchè l' interesse annuale è di fr. 13,27 per 100.

119. La quistione seguente è degna di particolare attenzione per le circostanze che presenta l'espressione dell'incognita.

Dividere un numero in due parti di cui i quadrati siano in un dato rapporto.

Sia a il numero dato,
m la ragione dei quadrati delle sue due parti,
x una di queste parti;
l' altra sarà $a-x$;
e per l' enunciato della quistione si avrà l'equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}=m.$$

Si presentano due vie per risolverla: si può o prepararla per darle la forma $x^2+px=q$, e poi risolverla col metodo generale, o pure, profittando della riflessione facile a farsi, che la frazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)}$$

è un quadrato, poichè il suo numeratore ed il suo denominatore sono quadrati, conchiuderne subito

$$\frac{x}{a-x}=\pm\sqrt{m},$$

$$x=\pm(a-x)\sqrt{m}.$$

Risolvendo separatamente le due equazioni di primo grado comprese in questa formola, cioè,

$$x=+(a-x)\sqrt{m},$$

$$x=-(a-x)\sqrt{m},$$

se ne otterrà

$$x=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

$$x=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}}.$$

Per la prima soluzione, la seconda parte del numero proposto è

$$a - \frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a + a\sqrt{m} - a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} = \frac{a}{1+\sqrt{m}};$$

e le due parti

$$\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}} \quad \text{ed} \quad \frac{a}{1+\sqrt{m}}$$

sono, come il richiede l'enunciato della quistione, e l'una e l'altra più piccole del numero proposto.

Per la seconda soluzione si ha

$$a + \frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a - a\sqrt{m} + a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} = \frac{a}{1-\sqrt{m}},$$

e le due parti sono allora

$$-\frac{a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}} \quad \text{ed} \quad \frac{a}{1-\sqrt{m}}.$$

I loro segni essendo contrari, il numero a non è più, a parlare propriamente, la loro somma, ma la loro differenza.

Allorchè si fa $m = 1$, vale a dire quando si suppone che i quadrati delle due parti cercate siano uguali, si ha

$$\sqrt{m} = 1;$$

la prima soluzione dà in questa ipotesi due parti uguali

$$\frac{a}{2}, \quad \frac{a}{2},$$

risultamento evidente da sè, mentre la seconda soluzione dà due risultamenti infiniti (68), cioè:

$$\frac{-a}{1-1} \quad \text{o sia} \quad \frac{-a}{0}, \quad \text{ed} \quad \frac{a}{1-1} \quad \text{o sia} \quad \frac{a}{0},$$

come appunto dovea essere ; imperocchè due quantità disuguali debbono di necessità essere riguardate come infinitamente grandi rispetto alla loro differenza, per poter supporre uguale all' unità il rapporto dei loro quadrati.

In fatti siano x ed $x - a$ queste due quantità ; il rapporto dei loro quadrati sarà

$$\frac{x^2}{x^2 - 2ax + a^2},$$

e dividendo i due termini di questa frazione per x^2, essa diverrà

$$\frac{1}{1 - \frac{2a}{x} + \frac{a^2}{x^2}};$$

ora è manifesto che quanto più il numero x sarà grande, tanto più le frazioni $\frac{2a}{x}$, $\frac{a^2}{x^2}$ saranno piccole, e tanto più il rapporto di cui è parola, si avvicinerà ad eguagliare $\frac{1}{1}$, ovvero 1.

120. Frattanto per paragonare il metodo generale all'andamento che si è tenuto, si svilupperà l'equazione

$$\frac{x^2}{(a-x)(a-x)} = m:$$

si avrà successivamente

$$x^2 = m(a-x)(a-x),$$
$$x^2 = a^2m - 2amx + mx^2,$$
$$x^2 - mx^2 + 2amx = a^2m,$$
$$(1-m)x^2 + 2amx = a^2m,$$
$$x^2 + \frac{2am}{1-m}x = \frac{a^2m}{1-m};$$

e facendo $\quad p = \frac{2am}{1-m}, \quad q = \frac{a^2m}{1-m},$

la formola generale darà

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}}.$$

Questi valori di x sembrano molto differenti da quelli che sono stati trovati di sopra ; ciò non ostante essi vi si riducono , ed in queste riduzioni propriamente l'esempio di cui mi sto occupando , può essere utile per mostrare l'importanza delle trasformazioni che le diverse operazioni algebriche producono nelle espressioni delle quantità.

Bisogna primieramente ridurre allo stesso denominatore le due frazioni comprese sotto il radicale, il che si effettuerà moltiplicando per $1-m$ i due termini della seconda; e verrà

$$\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m} = \frac{a^2m^2 + a^2m(1-m)}{(1-m)(1-m)} =$$

$$\frac{a^2m^2 + a^2m - a^2m^2}{(1-m)(1-m)} = \frac{a^2m}{(1-m)(1-m)}.$$

Il denominatore essendo un quadrato , resterà solamente da estrarre la radice del numeratore, e si avrà

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{(1-m)(1-m)} + \frac{a^2m}{1-m}} = \frac{\sqrt{a^2m}}{1-m};$$

ma l'espressione $\sqrt{a^2m}$ può ancora rendersi più semplice.

È evidente che il quadrato d'un prodotto si compone del prodotto dei quadrati di ciascuno dei suoi fattori, poichè, per esempio ,

$$bcd \times bcd = b^2c^2d^2,$$

e che per conseguenza la radice di $b^2c^2d^2$ non è altra cosa che il prodotto delle radici b, c e d dei fattori b^2, c^2 e d^2. Applicando queste osservazioni al prodotto a^2m, si vede che la sua radice è il prodotto di a, radice di a^2, per $\sqrt{m}$ che è l'indicazione della radice di m, ovvero che

$$\sqrt{a^2m} = a\sqrt{m}.$$

Da queste diverse trasformazioni segue che

$$x = -\frac{am}{1-m} \pm \frac{a\sqrt{m}}{1-m},$$

ovvero
$$x = \frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m},$$

$$x = \frac{-am - a\sqrt{m}}{1-m}.$$

Per semplici che siano, queste espressioni non sono ancora quelle del numero precedente; ed anche se si cerchi di verificarle pel caso in cui $m = 1$, esse divengono

$$x = \frac{-a + a}{1-1} = \frac{0}{0},$$

$$x = \frac{-a - a}{1-1} = \frac{-2a}{0}.$$

Si ritrova nella seconda espressione il simbolo dell'infinito, come precedentemente, ma la prima presenta la forma indeterminata $\frac{0}{0}$, di cui già si sono veduti esempi nei n^{ri} 69 e 70; prima però di decidere sul suo valore torna a proposito esaminare se essa cada per avventura nel caso del n° 70, cioè, se sia un fattor comune al numeratore e al denominatore che si riduca a zero nell'ipotesi di $m = 1$.

L'espressione
$$\frac{-am + a\sqrt{m}}{1-m}$$

è la stessa che $\frac{a(-m + \sqrt{m})}{1-m} = \frac{a(\sqrt{m} - m)}{1-m}$.

Si vede già che il numeratore non diviene zero che pel fattore $\sqrt{m} - m$; bisogna adunque cercare se mai quest'ultimo avesse qualche fattore comune col denominatore $1 - m$. Per evi-

tare l'imbarazzo che potrebbe essere cagionato dal segno radicale, pongo $\sqrt{m}=n$, e ne conchiudo, prendendo i quadrati, $m=n^2$: ciò trasforma le quantità

$$\sqrt{m}-m \qquad \text{ed} \qquad 1-m$$

in
$$n-n^2 \qquad \text{ed} \qquad 1-n^2;$$

ora $n-n^2=n(1-n)$ ed $1-n^2=(1-n)(1+n)$ (34); rimettendo per n il suo valore $\sqrt{m}$, si avrà

$$\sqrt{m}-m=(1-\sqrt{m})\sqrt{m},$$

$$1-m=(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m}),$$

e per conseguenza

$$\frac{a(\sqrt{m}-m)}{1-m}=\frac{a(1-\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{a\sqrt{m}}{1+\sqrt{m}},$$

risultamento simile a quello del n° 119.

Si riduce dell'istessa maniera il secondo valore di x, osservando che

$$\frac{-a\sqrt{m}-am}{1-m}=\frac{-a(1+\sqrt{m})\sqrt{m}}{(1-\sqrt{m})(1+\sqrt{m})}=\frac{-a\sqrt{m}}{1-\sqrt{m}},$$

come nel n° 119 (*).

Non è difficile vedere che avrei potuto evitare i radicali nel calcolo precedente, rappresentando con m^2 il rapporto dei quadrati delle due parti del numero proposto: allora m ne sarebbe stata la radice quadrata, la quale si può sempre riguardare come cognita, allorchè il suo quadrato è dato; ma non si sa-

(*) L'esempio del quale ho trattato sì a lungo, corrisponde ad un problema risoluto da Clairaut nella sua Algebra, e di cui l'enunciato è questo: *Trovare sulla linea che unisce due lumi qualunque, il punto ugualmente illuminato da questi due lumi.* Ho spogliato questo problema dalle circostanze fisiche, le quali sono estranee all'oggetto di quest'opera, e non possono che frastornare l'attenzione che richieggono le circostanze algebriche, osservabilissime in sè stesse, e che per questa ragione ho sviluppate più che non l'aveva fatto Clairaut.

rebbe da principio veduto il fine di un tale cangiamento di dati, di cui gli algebristi fanno uso frequentemente per rendere più semplici i calcoli; invito perciò il lettore a rifare la soluzione del problema, mettendo m^2 in luogo di m.

Dell' estrazione della radice quadrata dalle quantità algebriche.

121. La quistione precedente basta per indicare come bisogna condursi nella risoluzione delle quistioni letterali, ed ha presentata una trasformazione che molto importa di bene osservare, quella, cioè, di

$$\sqrt{a^2m} \quad \text{in} \quad a\sqrt{m} \quad \text{(pagina 152)},$$

poichè col mezzo di tale trasformazione si possono ridurre al più piccolo numero possibile i fattori contenuti sotto il radicale, e rendere così più semplice l'estrazione della radice che resta da farsi.

Questa trasformazione consiste, come si è veduto nel luogo citato, a *prendere separatamente la radice di tutti i fattori che sono quadrati, ed a scrivere queste radici fuori del radicale, come moltiplicatori di questo radicale, sotto del quale si lasciano tali quali sono, i fattori che non sono quadrati.*

Questa regola suppone primieramente che si sappia conoscere se una quantità algebrica sia un quadrato, ed in questo caso estrarne la radice; ora per conoscere questo, bisogna distinguere le quantità monomie dalle polinomie.

122. Risulta evidentemente dalla regola degli esponenti nella moltiplicazione, che *la seconda potenza di una quantità qualunque ha un esponente doppio di quello di questa quantità.*

Si ha, per esempio,

$$a^1 \times a^1 = a^2, \quad a^2 \times a^2 = a^4, \quad a^3 \times a^3 = a^6, \quad \text{ec.}$$

Segue da ciò, che *ogni fattore che è un quadrato, deve avere un esponente pari, e che si ottiene la radice di questo fattore scrivendo la sua lettera con un esponente uguale alla metà dell' esponente primitivo.*

Si ha così

$$\sqrt{a^2} = a^1, \quad \text{ovvero} \quad a, \quad \sqrt{a^4} = a^2, \quad \sqrt{a^6} = a^3, \quad \text{ec.}$$

In quanto ai fattori numerici, l'estrazione delle loro radici si eseguе, quando ha luogo, con le regole insegnate precedentemente.

Dietro queste riflessioni, i fattori a^6, b^4, c^2 dell'espres-

sione

$$\sqrt{64a^6b^4c^2}$$

sono quadrati; il numero 64 è il quadrato di 8; dunque *l'espressione proposta essendo un prodotto di fattori quadrati, avrà per radice il prodotto delle radici di ciascuno di questi fattori* (121); e per conseguenza

$$\sqrt{64a^6b^4c^2} = 8a^3b^2c.$$

123. Allorchè questa circostanza non ha luogo, *bisogna cercare di scomporre il prodotto proposto in due altri, di cui l'uno non contenga che i fattori quadrati, e l'altro i fattori non quadrati*; e perciò bisogna considerare a parte ciascuno di questi fattori.

Sia, per esempio,

$$\sqrt{72a^4b^3c^5}.$$

Si riconosce facilmente che tra i divisori del numero 72 vi sono quadrati perfetti, cioè, 4, 9 e 36; e prendendo il più grande, si ha

$$72 = 36 \times 2.$$

Il fattore a^4 essendo un quadrato, si mette da parte; passando in seguito al fattore b^3, si rifletterà che questo fattore non è quadrato, poichè il numero 3 è dispari, ma che può scomporsi in due altri fattori b^2 e b, di cui il primo è un quadrato, e si avrà

$$b^3 = b^2.b\ ;$$

si vede ancora che

$$c^5 = c^4.c\ ;$$

e sarebbe lo stesso di ogni altra lettera che avesse l'esponente dispari. Tutte queste scomposizioni danno

$$72a^4b^3c^5 = 36.2a^4b^2.bc^4.c\ ;$$

e ravvicinando i fattori quadrati, viene

$$36a^4b^2c^4 \times 2bc.$$

In fino, prendendo la radice del primo prodotto ed indicando quella del secondo, si ha

$$\sqrt{72a^4b^3c^5} = 6a^2bc^2\sqrt{2bc}.$$

Ecco altri esempi ancora di simili riduzioni, preceduti dai calcoli che li mettono in evidenza:

$$\sqrt{\frac{a^3}{b}} = \sqrt{a^2\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{a}{b}} = a\sqrt{\frac{ab}{b^2}} = \frac{a}{b}\sqrt{ab};$$

$$6\sqrt{\frac{75}{98}ab^2} = 6\sqrt{\frac{25 \cdot 3ab^2}{49 \cdot 2}} = 6\sqrt{\frac{25b^2 \cdot 3a}{49 \cdot 2}} =$$

$$\frac{6 \cdot 5}{7}b\sqrt{\frac{3a}{2}} = \frac{30b}{7}\sqrt{\frac{3a}{2}};$$

$$\sqrt{\frac{a^2m^2}{n^2} + \frac{a^2m}{n}} = \sqrt{\frac{a^2m^2 + a^2mn}{n^2}} =$$

$$\sqrt{\frac{a^2}{n^2}(m^2 + mn)} = \frac{a}{n}\sqrt{m^2 + mn}.$$

Relativamente al primo esempio bisogna osservare, che può farsi uscire dal radicale il denominatore delle frazioni algebriche, rendendolo un quadrato, nel modo cho è stato insegnato nel n° 104 per le frazioni numeriche.

124. Passo a trattare dell' estrazione della radice quadrata dei polinomi. È importante il ricordarsi che nessun binomio è un quadrato perfetto, perchè ogni monomio elevato a quadrato non produce che un monomio, ed il quadrato di un binomio costa sempre di tre parti (34).

Si cadrebbe in un errore grossolano prendendo per $\sqrt{a^2+b^2}$ il binomio $a + b$, benchè a sia separatamente la radice di a^2, e b quella di b^2; poichè il quadrato di $a + b$, essendo $a^2 + 2ab + b^2$, contiene di più il termine $+ 2ab$, che non si trova nell' espressione $a^2 + b^2$.

Sia dunque il trinomio

$$24a^2b^3c + 16a^4c^2 + 9b^6;$$

a fine di ritrovare in questa espressione le tre parti che compongono il quadrato di un binomio, la ordino per rapporto ad una delle sue lettere, alla lettera a, per esempio; e viene

$$16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6.$$

Allora, qualunque sia la radice cercata, supponendola ordinata rispetto alla stessa lettera a, il quadrato del suo primo termine deve necessariamente formare il primo termine $16a^4c^2$ della quantità proposta; il doppio prodotto del primo termine della radice pel secondo deve dare il secondo termine $24a^2b^3c$ della quantità proposta; ed in fine il quadrato dell' ultimo termine della radice deve essere precisamente l' ultimo termine $9b^6$ della quantità proposta. Dietro queste considerazioni, l' operazione si disporrà come si vede qui sotto:

$$\begin{array}{r|l}
16a^4c^2 + 24a^2b^3c + 9b^6 & 4a^2c + 3b^3 \quad \text{radico} \\
-16a^4c^2 \qquad\qquad\qquad & \overline{8a^2c} + 3b^3 \\
\hline
+24a^2b^3c + 9b^6 & \\
-24a^2b^3c - 9b^6 & \\
\hline
0 \qquad 0. &
\end{array}$$

Estraggo dapprima la radice quadrata dal primo termine $16a^4c^2$, ed il risultamento $4a^2c$ (122) è il primo termine della radice, il quale si scrive a dritta nell' istesso rigo della quantità proposta.

Sottraggo da questa quantità il quadrato $16a^4c^2$ del primo termine $4a^2c$ della radice; e facendo la riduzione non restano che i due termini $24a^2b^3c + 9b^6$.

Il termine $24a^2b^3c$ essendo il doppio prodotto del primo termine della radice $4a^2c$ pel secondo, otterrò quest' ultimo dividendo $24a^2b^3c$ per $8a^2c$, doppio di $4a^2c$, che si scrive al di sotto della radice; il quoziente $3b^3$ è il secondo termine della radice.

La radice è ora determinata; ma perchè essa sia esatta, bisogna che il quadrato del secondo termine faccia $9b^6$, ovvero

che il doppio $8a^2c$ del primo termine della radice, aumentato del secondo $3b^3$, e poi moltiplicato per lo stesso secondo termine, riproduca i due ultimi termini del quadrato (91); in conseguenza allato ad $8a^2c$ scrivo $+ 3b^3$, e moltiplico $8a^2c + 3b^3$ per $3b^3$; il prodotto essendo tolto dai due ultimi termini della quantità proposta, non resta niente; ed io conchiudo che questa quantità è il quadrato di $4a^2c + 8b^3$.

È evidente che i medesimi ragionamenti e gli stessi modi di operare possono essere applicati a tutte le quantità composte di tre termini.

125. Allorchè la quantità da cui si vuole estrarre la radice ha più di tre termini, siffatta quantità non è più il quadrato d'un binomio; ma supponendola il quadrato d'un trinomio $m + n + p$, e rappresentando con l la somma $m + n$ dei due primi termini di lui, questo trinomio si cangia in $l + p$, ed il suo quadrato diventa

$$l^2 + 2lp + p^2,$$

ove il quadrato l^2 del binomio $m + n$, essendo sviluppato, produrrebbe i termini $m^2 + 2mn + n^2$. Così, quando la quantità proposta sarà stata ordinata, il primo termine sarà evidentemente il quadrato del primo termine della radice, ed il secondo conterrà il doppio prodotto del primo termine della radice pel secondo di questa radice medesima; si avrà dunque quest'ultimo dividendo il secondo termine della quantità proposta pel doppio della radice del primo. Conoscendo allora i due primi termini della radice cercata, si completerà il quadrato di questi due termini, rappresentato qui da l^2, e togliendolo dalla quantità proposta, resterà

$$2lp + p^2,$$

quantità che contiene il doppio prodotto di l, o sia del primo binomio $m + n$, pel resto della radice, più il quadrato di questo resto, e fa per conseguenza vedere che bisogna operare con questo binomio, come si è fatto col primo termine m della radice.

Serva d'esempio la quantità

$$64a^2bc + 25a^2b^2 - 40a^3b + 16a^4 + 64b^2c^2 - 80ab^2c;$$

la quale prima si ordini rispetto alla lettera a, e poi si dispon-

ga l'operazione come precedentemente:

$$\begin{array}{l|l} 16a^4 - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 + 64a^2bc & 4a^2 - 5ab + 8bc \\ -16a^4 & 8a^2 - 5ab \\ \hline 1^\circ \text{ resto } - 40a^3b + 25a^2b^2 - 80ab^2c + 64b^2c^2 + 64a^2bc & 8a^2 - 10ab + 8bc \\ \quad + 40a^3b - 25a^2b^2 & \\ \hline 2^\circ \text{ resto } \ldots + 64a^2bc - 80ab^2c + 64b^2c^2 & \\ \quad - 64a^2bc + 80ab^2c - 64b^2c^2 & \\ \hline \quad 0 \quad 0 \quad 0. & \end{array}$$

Ciò fatto, si estragga la radice quadrata dal primo termine $16a^4$, e si otterrà $4a^2$ pel primo termine della radice cercata; se ne formi il quadrato, il quale si tolga dalla quantità proposta.

Si raddoppii il primo termine della radice, e si scriva al di sotto il risultamento $8a^2$, pel quale si divida il termine $-40a^3b$ col quale principia il primo resto; si avrà così $-5ab$ pel secondo termine della radice; si scriva questo termine allato ad $8a^2$, si moltiplichi il tutto per questo secondo termine, e si tolga il risultamento dal resto sul quale si sta operando.

Di questa maniera è stato sottratto dalla quantità proposta il quadrato del binomio $4a^2 - 5ab$; il secondo resto non contenendo altro che il doppio prodotto di questo binomio pel terzo termine della radice, ed il quadrato di questo termine, si raddoppii la quantità $4a^2 - 5ab$, il che darà l'espressione

$$8a^2 - 10ab,$$

la quale si scriva al di sotto di $8a^2 - 5ab$, e si prenda per divisore del secondo resto: il primo termine del quoziente, che è $8bc$, sarà il terzo termine della radice.

Questo termine si scriva pure allato ad $8a^2 - 10ab$, e si moltiplichi il tutto per questo termine; si tolga il prodotto dal resto sul quale si opera, il quale resto si troverà interamente distrutto: la quantità proposta è dunque il quadrato di

$$4a^2 - 5ab + 8bc.$$

Egli è facile ora di estendere per quanto si vorrà l'operazione di cui abbiamo di sopra ragionato, la quale è daltronde perfettamente simile a quella che è stata prescritta pei numeri.

Della formazione delle potenze, e dell'estrazione delle loro radici.

126. L'operazione aritmetica dalla quale dipende la risoluzione delle equazioni del secondo grado, e pel cui mezzo si ritorna dal quadrato alla quantità che l'ha formato, ossia alla radice quadrata, non è che un caso particolare di un'altra operazione più generale, la quale serve *a trovare un numero di cui si conosca una potenza qualunque.* Ben si comprende che questa operazione, la quale conduce ad un risultamento che si disegna pure col vocabolo *radice,* aggiuntavi però l'indicazione del grado, essendo inversa di quella che serve a trovare la potenza, non può essere dedotta che dall'esame delle circostanze di quest'ultima, come avviene alla divisione in riguardo alla moltiplicazione, colle quali operazioni questo soggetto ha peraltro rapporti che si renderanno bentosto noti.

Si perviene alle potenze dei numeri interi per mezzo della moltiplicazione (24), ed è chiaro che quelle dei fratti si formano elevando il loro numeratore ed il loro denominatore alla potenza proposta (96).

Reciprocamente la radice di una frazione, di qualunque grado essa sia, si ottiene prendendo quella del numeratore e quella del denominatore.

L'uso dei simboli algebrici essendo comodissimo per esprimere tutto ciò che riguarda la composizione e la scomposizione delle quantità, si procederà dapprima alla formazione delle potenze delle espressioni algebriche; giacchè riguardo a quelle dei numeri, ciò che si è detto nel n° 24, basterà per trovarle

Tavola delle 7 prime potenze dei numeri da 1 fino a 9.

1^a	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^a	1	4	9	16	25	36	49	64	81
3^a	1	8	27	64	125	216	343	512	729
4^a	1	16	81	256	625	1296	2401	4096	6561
5^a	1	32	243	1024	3125	7776	16807	32768	59049
6^a	1	64	729	4096	15625	46656	117649	262144	531441
7^a	1	128	2187	16384	78125	279936	823543	2097152	4782969

Ho esposta qui questa tavola principalmente per dimostrare con quanta rapidità s'accrescano le potenze dei numeri, a misura che diventano più elevate ; la quale osservazione è importantissima in quello che segue. Si vede in fatti che la settima potenza di 2 è già 128 , e che quella di 9 monta sino a 4782969.

Si concepisce facilmente da ciò , come le potenze delle frazioni propriamente dette decrescano rapidissimamente ; questo accade perchè le potenze del denominatore diventano grandi di più in più relativamente a quelle del numeratore.

La settima potenza di $\frac{1}{2}$, per esempio, non è che $\frac{1}{128}$, e quella di $\frac{1}{9}$ è appena $\frac{1}{4782969}$.

127. Poichè nella formazione di un prodotto ciascuna lettera deve avere per esponente la somma degli esponenti che essa ha in ciascuno dei fattori (26) , ne segue che *la potenza d'una quantità monomia si forma moltiplicando l'esponente di ciascun fattore per l'esponente di questa potenza.*

La terza potenza di a^2b^3c , per esempio , si otterrà moltiplicando gli esponenti 2 , 3 ed 1 delle lettere a , b , c per 3 , esponente della potenza dimandata : si avrà $a^6b^9c^3$; ed in fatti questa potenza è la stessa cosa che

$$a^2b^3c \times a^2b^3c \times a^2b^3c = a^{2\cdot3}b^{3\cdot3}c^{1\cdot3}\,.$$

Se la quantità proposta avesse un coefficiente numerico, bisognerebbe elevare ancora questo coefficiente alla potenza proposta; così la quarta potenza di $3ab^2c^5$ è

$$81a^4b^8c^{20},$$

perchè quella di 3 è 81.

128. Riguardo ai segni da cui le quantità monomie possono essere affette, bisogna osservare che *tutte le potenze il cui esponente è pari, hanno il segno* $+$, *e che quelle il cui esponente è dispari, hanno lo stesso segno della quantità che le ha formate.*

Infatti le potenze di grado pari risultano dalla moltiplicazione d'un numero pari di fattori; e i segni $-$, combinati a 2 a 2 nella moltiplica, danno sempre al prodotto il segno $+$ (31). Al contrario, se il numero dei fattori è dispari, il prodotto avrà il segno $-$ quando i fattori ne saranno affetti, poichè questo prodotto risulterà dal prodotto di un numero pari di fattori, e per conseguenza positivo, moltiplicato per un fattore negativo.

129. Per ritornare dalla potenza alla quantità che l'ha formata, o sia alla radice di lei, non si debbono che rinversare le regole date qui sopra; cioè, *dividere l'esponente di ciascuna lettera per quello che denota il grado della radice che si vuole estrarre.*

Si troverà di questa maniera la *radice cubica*, ovvero *la radice di terzo grado*, dell'espressione $a^6b^9c^3$, dividendo per 3 gli esponenti 6, 9 e 3, il che darà

$$a^2b^3c.$$

Allorchè l'espressione proposta ha un coefficiente numerico, bisognerà prendere la radice anche di questo, onde formare il coefficiente della quantità letterale che si ottiene con la regola precedente.

Se si domandasse, per esempio, la radice quarta di $81a^4b^8c^{20}$, si vedrebbe, mediante la tavola del n° 126, che 81 è la quarta potenza di 3; e dividendo per 4 gli esponenti delle lettere, si avrebbe per risultamento

$$3ab^2c^5.$$

Nel caso in cui la radice del coefficiente numerico non potesse trovarsi col mezzo della tavola citata, si estrarrà coi metodi che darò in appresso.

130. È evidente che l'estrazione delle radici non può effettuarsi sulla parte letterale dei monomi, che quando ciascuno degli esponenti è divisibile per quello della radice; nel caso contrario non si può che indicare l'operazione aritmetica che bisognerà fare, allorchè si sostituiranno i numeri alle lettere.

Si fa uso anche per quest'oggetto del segno $\sqrt{\ }$; ma per denotare il grado della radice, si mette l'esponente come si vede qui sotto nelle espressioni

$$\sqrt[3]{a}\,, \qquad \sqrt[5]{a^2}\,,$$

delle quali la prima rappresenta la radice cubica, ossia la radice di terzo grado, di a, e la seconda la radice quinta di a^2.

Le espressioni affette dal segno $\sqrt{\ }$, di qualunque grado siano, possono spesso rendersi più semplici facendo attenzione che, giusta il n° 127, *una potenza qualunque di un prodotto è formata dal prodotto della medesima potenza di ciascuno dei fattori*, e che per conseguenza *la radice qualunque d'un prodotto è formata dal prodotto delle radici dello stesso grado di ciascuno dei fattori di lui*. Risulta da quest'ultimo principio che *se la quantità sottoposta al radicale ha fattori che siano potenze esatte dello stesso grado del radicale, si potranno separatamente prendere le radici di questi fattori, e moltiplicare il loro prodotto per la radice indicata degli altri fattori.*

Sia, per esempio,

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}}\,;$$

si vede che

$$96 = 32 \times 3 = 2^5.3,$$

che $\quad a^5$ è la quinta potenza di a,

che $\quad b^7 = b^5.b^2$,

che $\quad c^{11} = c^{10}.c$:

si ha per conseguenza

$$96a^5b^7c^{11} = 2^5a^5b^5c^{10} \times 3b^2c.$$

Il primo fattore avendo per radice quinta la quantità $2abc^2$,

si troverà che

$$\sqrt[5]{96a^5b^7c^{11}} = 2abc^2\sqrt[5]{3b^2c}\,.$$

131. Ogni potenza pari dovendo avere il segno $+$ (128), nessuna quantità affetta dal segno $-$ può essere una potenza di grado pari, e per conseguenza le quantità affette dal segno $-$ non possono avere radici di grado pari. Segue da ciò, che *ogni radicale di grado pari, che comprende una quantità negativa, è un' espressione immaginaria:*

$$\sqrt[4]{-a}\,,\qquad \sqrt[6]{-a^4}\,,\qquad b+\sqrt[8]{-ab^7}\,,$$

sono espressioni immaginarie.

Non si possono dunque assegnare, sia esattamente, sia per approssimazione, pei gradi di cui l' esponente è pari, che le radici delle quantità positive; *e queste radici possono essere affette indifferentemente dal segno $+$ o dal segno $-$*, perchè sì nell' uno che nell' altro caso esse riproducono egualmente la quantità proposta col segno $+$, e perchè s' ignora a quale delle due esse appartengano.

Non è lo stesso pei gradi dispari, nei quali le potenze hanno l' istesso segno delle loro radici (128): *si deve dare alle radici di questi gradi il segno dal quale la potenza è affetta;* ed in questo caso non si hanno espressioni immaginarie.

132. È a proposito l'osservare che l'applicazione della regola data nel n° 129 per l' estrazione delle radici dei monomi relativamente agli esponenti dei loro fattori, conduce naturalmente ad indicare con segni più comodi pel calcolo, che non è il segno $\sqrt{\ }$, le radici che non possono ottenersi algebricamente.

Allorchè si domanda, per esempio, la radice terza di a^5, bisogna, secondo la regola citata, dividere l' esponente 5 per 3; ma la divisione non potendo eseguirsi, conduce al numero frazionario $\frac{5}{3}$; e la forma che prende allora l' esponente del risultamento, indica che l' estrazione della radice non è possibile nello stato attuale della quantità proposta: si debbono dunque riguardare le due espressioni

$$\sqrt[3]{a^5}\,,\qquad \text{ed}\qquad a^{\frac{5}{3}}$$

come equivalenti.

L'ultima espressione ha non pertanto sulla prima il vantaggio di dare subito la semplicizzazione della quale la quantità $\sqrt[3]{a^5}$ è suscettibile; poichè se si estraggono gl'interi contenuti nella frazione $\frac{5}{3}$, si ha $1 + \frac{2}{3}$; e riguardando questa somma come l'esponente di un prodotto (25), si riconosce che la quantità

$$a^{\frac{5}{3}} = a^{1 + \frac{2}{3}} = a^1 \times a^{\frac{2}{3}},$$

è composta di due fattori, dei quali il primo è a, e l'altro riducesi a $\sqrt[3]{a^2}$.

Si perverrebbe all'istesso risultamento operando sull'espressione $\sqrt[3]{a^5}$ col mezzo del n° 130, ma dall'esponente frazionario vi siamo condotti immediatamente: del resto in altre operazioni si avrà l'occasione di riconoscere i vantaggi degli esponenti frazionari, e di giustificarne l'uso.

Per ora basta osservare che la divisione degli esponenti, quando può eseguirsi, corrisponde all'estrazione delle radici; quando poi è indicata, si deve riguardare come il simbolo della medesima operazione, e conchiuderne che le espressioni

$$\sqrt[n]{a^m}, \quad \text{ed} \quad a^{\frac{m}{n}}$$

sono equivalenti.

Ed ecco ancora che le convenzioni stabilite sulla maniera di esprimere le potenze conducono per analogia e per estensione a simboli speciali, in una guisa consimile a quella che nel n° 37 ne guidò all'espressione $a^0 = 1$.

133. Osservo in questa occasione che la regola degli esponenti relativa alla divisione (36), essendo applicata conformemente a quella dei segni relativa alla sottrazione (20), manoduce anch'essa a nuove espressioni per una certa classe di frazioni.

Infatti si ha da queste regole

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$$

ma se l' esponente n del denominatore sorpassa l' esponente m del numeratore, l' esponente della lettera a nel secondo membro sarà negativo.

Se, per esempio, $m=2$, $n=3$, si avrà

$$\frac{a^2}{a^3}=a^{2-3}=a^{-1};$$

ma d' altronde, semplicizzando la frazione $\frac{a^2}{a^3}$, si trova $\frac{1}{a}$:

le espressioni

$$\frac{1}{a} \qquad \text{ed} \qquad a^{-1}$$

sono dunque equivalenti.

In generale per la regola degli esponenti si ha

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=a^{m-m-n}=a^{-n};$$

e d' altronde

$$\frac{a^m}{a^{m+n}}=\frac{1}{a^n};$$

dunque le espressioni

$$\frac{1}{a^n} \qquad \text{ed} \qquad a^{-n}$$

sono equivalenti.

In fatti il segno — che precede l' esponente n, essendo preso nel senso del nº 62, mostra che l' esponente proposto viene da una frazione di cui il denominatore contiene n fattori a di più del numeratore, il che equivale ad $\frac{1}{a^n}$; si può dunque, quando s' incontra una qualunque di queste espressioni, sostituirvi l' altra.

In conseguenza di questa osservazione la quantità $\frac{a^2b^5}{c^2d^3}$ con-

siderata come

$$a^2b^5 \times \frac{1}{c^2} \times \frac{1}{d^3},$$

può essere posta sotto la forma

$$a^2b^5c^{-2}d^{-3};$$

cioè a dire, che *tutti i fattori del denominatore possono essere trasportati al numeratore, apponendo il segno — ai loro esponenti.*

Reciprocamente, *allorchè una quantità contiene fattori con esponenti negativi, questi si pongono nel denominatore, dando il segno + ai loro esponenti*; e quindi è che la quantità

$$a^2b^5c^{-2}d^{-3}$$

ritorna ad essere

$$\frac{a^2b^5}{c^2d^3}.$$

Della formazione delle potenze delle quantità complesse.

134. Comincerò dall' osservare che le potenze delle quantità complesse s' indicano inviluppando queste quantità in una parentesi, alla quale si appone l' esponente della potenza.

L' espressione

$$(4a^2 - 2ab + 5b^2)^3,$$

per esempio, dinota la terza potenza della quantità

$$4a^2 - 2ab + 5b^2.$$

S' indicherebbe ancora questa potenza come qui sotto

$$\overline{4a^2 - 2ab + 5b^2}^{\,3}.$$

135. Le quantità binomie sono le più semplici dopo le monomie; pur tuttavia se se ne volessero formare le potenze con le moltiplicazioni successive, non si perverrebbe in tal modo che a risultamenti particolari per ciascuna potenza, come lo sono per la seconda e per la terza quelli che ho fatti notare ne

n° 34 ; si formerebbe questa tavola :

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2 ,$$
$$(x+a)^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 ,$$
$$(x+a)^4 = x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 ,$$

ec. ;
ma non si comprenderebbe facilmente la legge dei coefficienti numerici di questi risultamenti.

Riflettendo all' andamento della moltiplicazione , si conoscerà che i coefficienti numerici nascono dalle riduzioni cagionate dall' uguaglianza dei fattori che formano la potenza , e che impedendo queste riduzioni , la composizione dei prodotti si renderà più manifesta.

Per ottenere questo vantaggio, basterà fare differenti tutti i secondi termini dei binomi che si moltiplicano , cioè basterà , per esempio , prendere

$$x+a , \quad x+b , \quad x+c , \quad x+d , \quad \text{ec.}$$

Eseguendo le moltiplicazioni che or ora indicherò , e situando in una medesima colonna i termini affetti dalla stessa potenza di x , sarà facile trovare che

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b) = x^2 &+ ax + ab ,\\ &+ bx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c) = x^3 &+ ax^2 + abx + abc ,\\ &+ bx^2 + acx\\ &+ cx^2 + bcx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4 &+ ax^3 + abx^2 + abcx + abcd .\\ &+ bx^3 + acx^2 + abdx\\ &+ cx^3 + adx^2 + acdx\\ &+ dx^3 + bcx^2 + bcdx\\ &\qquad\quad + bdx^2\\ &\qquad\quad + cdx^2 .\end{aligned}$$

Senza spingere più oltre questi prodotti , può già ravvisarsi la legge della loro formazione.

Concependo che tutti i termini affetti dalla stessa potenza di x , e situati nella stessa colonna , non ne formino che un

solo, come, per esempio,

$$ax^3 + bx^3 + cx^3 + dx^3 = (a + b + c + d)x^3 ,$$

e così degli altri,

1° *Si trova in ciascun prodotto un termine di più che non sonovi unità nel numero dei suoi fattori ;*

2° *L'esponente di* x *nel primo termine è lo stesso che il numero dei fattori, e va diminuendo di un'unità da un termine al seguente ;*

3° *La più alta potenza di* x *non ha per coefficiente che l'unità ; quella che la segue, ovvero che ha un' unità di meno nel suo esponente, è moltiplicata per la somma dei secondi termini dei binomî; quella che ha due unità di meno nel suo esponente, è moltiplicata per la somma dei diversi prodotti che si ottengono moltiplicando a due a due i secondi termini dei binomî ; quella che ha tre unità di meno nel suo esponente, è moltiplicata per la somma dei diversi prodotti che si ottengono moltiplicando a tre a tre i secondi termini dei binomî, e così di seguito ; in fine nell'ultimo termine l' esponente di* x*, essendo considerato come uguale a zero* (37), *si trova composto del più alto esponente, diminuito di tante unità quante ve ne sono nel numero dei fattori, e questo termine contiene il prodotto di tutti i secondi termini dei binomî.*

Si vede facilmente che la forma di questi prodotti dee restar sottomessa alla stessa legge, qualunque sia il numero dei fattori ; ciò non per tanto se ne può avere ancora una pruova più rigorosa dell' analogia.

136. In primo luogo è evidente che ogni prodotto di questa specie deve contenere le potenze successive di x, da quella che ha per esponente il numero dei fattori che si sono moltiplicati, fino a quella che ha per esponente zero. Per indicare generalmente il risultamento, si esprimerà questo numero con la lettera m ; le potenze successive di x saranno allora rappresentate da

$$x^m, \quad x^{m-1}, \quad x^{m-2}, \quad \text{ec.};$$

si metteranno le lettere $A, B, C, \ldots\ldots Y$ in luogo delle quantità che debbono moltiplicarle, a partire da x^{m-1} ; ma il numero dei termini, il quale dipende dai valori particolari dati all'esponente m, restando indeterminato fino a che non si fissa questo esponente, non si possono scrivere che i primi e gli ultimi termini dell' espressione, e s' indicano con una serie di punti i termini intermedî che sono sottintesi.

Per tal modo la formola

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} \ldots\ldots\ldots + Y$$

rappresenta il prodotto di un numero qualunque m di fattori

$$x+a\,,\quad x+b\,,\quad x+c\,,\quad x+d\,,\quad \text{ec.}$$

Se questo prodotto si moltiplica per un nuovo fattore $x+l$, verrà

$$\left.\begin{array}{l} x^{m+1} + Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} \ldots\ldots\ldots \\ \quad + lx^m + lAx^{m-1} + lBx^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + lY \end{array}\right\}.$$

È evidente 1° che se A è la somma degli m secondi termini a, b, c, d, ec., $A+l$ sarà quella di $m+1$ secondi termini a, b, c, d, ec., l, e che per conseguenza la composizione assegnata a questo coefficiente sarà vera pel prodotto del grado $m+1$, se essa è vera per quello del grado m.

2° Se B è la somma dei prodotti delle m quantità a, b, c, d, ec. prese a due a due, $B+lA$ esprimerà quella dei prodotti di $m+1$ quantità a, b, c, d, ec., l, prese ancora a due a due; poichè A essendo la somma delle prime, lA sarà quella dei loro prodotti con la nuova quantità introdotta l; dunque la composizione assegnata sarà vera pel grado $m+1$, se essa lo è pel grado m.

3° Se C è la somma dei prodotti delle m quantità a, b, c, d, ec., prese a tre a tre, $C+lB$ sarà quella dei prodotti di $m+1$ quantità a, b, c, d, ec., l, prese pure a tre a tre, poichè lB, per ciò che precede, esprimerà la somma dei prodotti delle prime, prese a due a due, moltiplicate per la nuova quantità introdotta l: dunque la composizione assegnata sarà vera pel grado $m+1$, se essa ha luogo pel grado m.

Si vede che questa maniera di ragionare si estende a tutti i termini, e che l'ultimo lY sarà il prodotto degli $m+1$ secondi termini.

Le osservazioni enunciate nel numero 135 essendo vere, per esempio, pel quarto grado, lo saranno, secondo ciò che si è dimostrato, pel quinto, pel sesto; ed elevandosi così di grado in grado, esse saranno provate in generale.

Segue da ciò, che il prodotto di un numero qualunque m di fattori binomi $x+a$, $x+b$, $x+c$, $x+d$, ec. essendo rappresentato da

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ec.}\,,$$

A sarà sempre la somma della m lettere a, b, c, ec.,

B quella dei prodotti di queste quantità prese a due a due, C quella dei prodotti di queste quantità prese a tre a tre, e così di seguito.

Per racchiudere la legge di questa espressione in un solo termine, ne considererò uno situato in un posto indeterminato, e che, per questa ragione, rappresenterò con Nx^{m-n}.

Questo termine sarà il secondo, se si fa $n=1$; il terzo se si fa $n=2$; l'undicesimo, se si fa $n=10$, ec. Nel primo caso la lettera N sarà la somma delle m lettere a, b, c, ec.; nel secondo, quella dei loro prodotti a due a due; nel terzo, quella dei loro prodotti a dieci a dieci; ed in generale quella dei loro prodotti ad n ad n.

137. Per cangiare i prodotti

$$(x+a)(x+b),\ (x+a)(a+b)(x+c),\ (x+a)(x+b)(x+c)(x+d),\ \text{ec.}$$

nelle potenze di $x+a$, cioè, in

$$(x+a)^2, \qquad (x+a)^3, \qquad (x+a)^4, \qquad \text{ec.}$$

basterà fare negli sviluppi di questi prodotti

$$a=b, \qquad a=b=c, \qquad a=b=c=d, \qquad \text{ec.}$$

Tutte le quantità che moltiplicano una medesima potenza di x, diverranno allora eguali tra loro: così il coefficiente del secondo termine, che nel prodotto

$$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) \qquad \text{è} \qquad a+b+c+d,$$

si muterà in $4a$; quello del terzo termine, che nello stesso prodotto è

$$ab+ac+ad+bc+bd+cd,$$

diverrà $6a^2$; e da ciò è facile accorgersi che i coefficienti delle diverse potenze di x si cangeranno in una sola potenza di a, ripetuta tante volte quanti sono i termini, ed indicata dal nu-

mero dei fattori contenuti da questi termini. Così il coefficiente N, che moltiplica la potenza x^{m-n} nello sviluppo generale, sarà la potenza n di a, ovvero a^n, ripetuta tante volte quanti sono i prodotti differenti che possono formarsi prendendo di tutte le maniere possibili un numero n di lettere sopra un numero m; alla ricerca dunque del numero di questi prodotti si è ridotta quella del coefficiente del termine affetto da x^{m-n}.

138. Per giungere allo scoprimento del numero di cui si tratta, bisogna in primo luogo distinguere le disposizioni ovvero *permutazioni* dai prodotti ovvero *combinazioni*.

Due lettere a e b non danno che un solo prodotto, ma sono suscettibili di due disposizioni ab e ba; tre lettere a, b, c, che non danno che un solo prodotto, sono suscettibili di sei disposizioni (88), e così di seguito.

Per fissare le idee, suppongo che si abbiano in tutto 9 lettere

$$a,\quad b,\quad c,\quad d,\quad e,\quad f,\quad g,\quad h,\quad i,$$

e che sia quistione di disporle a 7 a 7; è evidente che scegliendo a piacimento una disposizione di sei di queste lettere, per esempio, $abcdef$, vi si potrà successivamente aggiungere ciascuna delle tre rimanenti lettere g, h ed i, e si avranno in questo modo tre disposizioni di 7 lettere, cioè:

$$abcdefg,\qquad abcdefh,\qquad abcdefi.$$

Ciò che ora ho detto sopra una disposizione particolare di sei lettere, converrà egualmente a tutte le altre; e se ne dovrà concliudere che ciascuna disposizione di sei lettere ne darà tre di sette lettere, cioè, tante, quante sono le lettere che non vi sono state adoperate. Dunque, se il numero delle disposizioni di sei lettere è rappresentato da P, si avrà quello delle disposizioni di sette lettere moltiplicando P per 3 ovvero per $9-6$. Surrogando m ed n ai numeri 9 e 7, e riguardando P come il numero delle disposizioni di cui sono suscettibili m lettere prese ad $n-1$ per volta, il ragionamento rimarrà lo stesso, e si avrà ancora pel numero delle disposizioni composte da n lettere

$$P\,[\,m-(n-1)\,],\qquad \text{ossia}\qquad P(m-n+1).$$

Questa formola racchiude implicitamente tutti i casi particolari. Per dedurne, a cagion d'esempio, il numero delle disposizioni di m lettere prese a due a due, si farà $n = 2$, il che darà

$$n - 1 = 1 \;;$$

si avrà inoltre

$$P = m \;,$$

poichè P eguaglierà allora il numero delle lettere prese ad una ad una: da queste considerazioni risulterà dunque

$$m(m - 2 + 1) \qquad \text{ovvero} \qquad m(m - 1).$$

Facendo in seguito

$$P = m(m - 1)\;, \qquad \text{ed} \qquad n = 3\;,$$

si troverà pel numero delle disposizioni di cui sono suscettibili m lettere prese a 3 a 3,

$$m(m - 1)(m - 3 + 1) = m(m - 1)(m - 2).$$

Facendo

$$P = m(m - 1)(m - 2)\;, \qquad \text{ed} \qquad n = 4\;,$$

si otterrà

$$m(m - 1)(m - 2)(m - 3)$$

pel numero delle disposizioni di m lettere prese a 4 a 4. E procedendo allo stesso modo si calcoleranno di mano in mano le espressioni del numero delle disposizioni formate da quante lettere si vorrà (*).

(*) In queste disposizioni si sono escluse le ripetizioni della stessa lettera, come cose estranee alla ricerca che ci occupa; ma la teoria delle permutazioni e delle combinazioni servendo di base al Calcolo delle probabilità, presenta alcune quistioni ove questa circostanza può aver luogo. Per calcolarne l'effetto, nell'esempio di cui mi son servito, basterà osservare che può scriversi indifferentemente ciascuna delle 9 lettere a, b, c, d, e, f, g, h, i, appresso al prodotto $abcdef$ di sei lettere. Chiamando dunque P il numero delle disposizioni di questa specie, si avrà $P \times 9$ pel numero delle disposizioni di 7 lettere. Per la stessa ragione, se P rappresenta il numero delle disposizioni di m lettere prese ad $n-1$ ad $n-1$, quello delle disposizioni ad n ad n sarà Pm.

Ciò posto, il numero delle disposizioni di m lettere prese ad 1 ad 1 essendo evidentemente m, quello delle disposizioni a 2 a 2 sarà $m \times m$, ovvero m^2; quello delle disposizioni a 3 a 3 sarà $m \times m \times m$, ovvero m^3; ed in fine m^n esprimerà il numero delle disposizioni ad n ad n.

139. Per passare adesso dal numero delle disposizioni di n lettere a quello dei prodotti differenti, è necessario conoscere il numero delle disposizioni di cui uno stesso prodotto è suscettibile. A tal uopo si osserverà, che se in una qualunque di queste disposizioni si stabilisce una delle lettere al primo posto, tra tutte le altre si potranno fare tante permutazioni, quante ne comporta un prodotto di $n-1$ lettere. Prendo per esempio il prodotto $abcdefg$ composto di 7 lettere; lasciando a nel primo posto, si può scrivere questo prodotto in tanti modi diversi, quante sono le disposizioni del prodotto delle sei lettere $bcdefg$; ma ciascuna lettera del prodotto proposto può essere scritta nel primo posto: dunque, chiamando Q il numero delle disposizioni di cui è suscettibile un prodotto di 6 lettere, si avrà $Q \times 7$ per quello delle disposizioni d'un prodotto composto di 7 lettere. Da ciò segue che, rappresentando con Q il numero delle disposizioni date da un prodotto di $n-1$ lettere, Qn denoterà il numero delle disposizioni di un prodotto di n lettere.

Tutti i casi particolari si deducono senza pena da questa formola; poichè, facendo $n=2$, ed osservando che quando non v'ha che una sola lettera, $Q=1$, emerge $1 \times 2=2$ pel numero delle disposizioni d'un prodotto di due lettere; prendendo in seguito $Q=1 \times 2$, ed $n=3$, si avrà $1 \times 2 \times 3=6$ pel numero delle disposizioni d'un prodotto di 3 lettere; facendo inoltre $Q=1 \times 2 \times 3$, ed $n=4$, ne risulteranno $1 \times 2 \times 3 \times 4$, ovvero 24 disposizioni possibili in un prodotto di 4 lettere, e così di seguito.

140. Essendo stato ben compreso ciò che precede, è facile vedere che dividendo il numero totale delle disposizioni di n lettere, dato dalle m lettere proposte, pel numero delle disposizioni di cui è suscettibile uno stesso prodotto, si avrà per quoziente il numero dei prodotti differenti che si possono formare prendendo di tutte le maniere possibili n fattori tra queste m lettere. Detto numero sarà dunque espresso da $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ (*); o secondo ciò che si è dimostrato nel nu-

(*) È a proposito l'osservare che facendovi successivamente

$$n=2, \quad n=3, \quad n=4, \quad \text{ec.},$$

la formola $\frac{P(m-n+1)}{Qn}$ diventa

$$\frac{m(m-1)}{1\,.\,2}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}, \quad \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}, \text{ ec.},$$

mero 137, $\frac{P(m-n+1)}{Qn} a^n x^{m-n}$ sarà il termine affetto da x^{m-n} nello sviluppo di $(x+a)^m$.

È evidente frattanto che il termine che precede quest'ultimo, sarà espresso da $\frac{P}{Q} a^{n-1} x^{m-n+1}$; poichè risalendo verso il primo termine, l'esponente di x aumenta di un'unità, e quello di a diminuisce d'altrettanto; di più P e Q sono le quantità relative al numero $n-1$.

141. Se si fa $\frac{P}{Q} = M$, i due termini consecutivi testè indicati diverranno

$$Ma^{n-1} x^{m-n+1} \quad \text{ed} \quad M\frac{(m-n+1)}{n} a^n x^{m-n},$$

risultamenti che mostrano come ciaschedun termine dello sviluppo di $(x+a)^m$ si formi da quello che lo precede.

Partendo dal primo termine, che è x^m, si perviene al secondo facendo $n=1$; si ha pure $M=1$, poichè x^m non ha per coefficiente che l'unità; il secondo termine sarà dunque $\frac{1 \times m}{1} ax^{m-1}$, ovvero $\frac{m}{1} ax^{m-1}$.

Per passare al terzo termine, si farà $M=\frac{m}{1}$ ed $n=2$, il che darà $\frac{m(m-1)}{1.2} a^2x^{m-2}$. Il quarto si ottiene con la supposizione di $M=\frac{m(m-1)}{1.2}$ e di $n=3$, la quale conduce ad $\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3x^{m-3}$, e così di seguito, il che pro-

numeri che esprimono rispettivamente quante combinazioni possono farsi con un numero qualunque m di cose, prendendole *a due a due*, o *a tre a tre*, o *a quattro a quattro*, ec.

duce la formola

$$(x+a)^m = x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2}$$

$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} a^3 x^{m-3} + \text{ec.},$$

la quale tradotta in linguaggio ordinario, dà luogo alla regola seguente:

Per passare da un termine a quello che lo segue, si moltiplichi il coefficiente numerico per l' esponente di x *nel primo; si divida pel numero che dinota il posto di questo termine; si aumenti di un' unità l' esponente di* a, *e si diminuisca d' altrettanto quello di* x.

Quantunque non possa fissarsi il numero dei termini di questa formola se non che assegnando un valore particolare ad m, pure non dee ora restare alcun dubbio sulla legge seguita dai di lei termini, per quanto lontani si suppongano dal primo; o si vede che

$$\frac{m(m-1)(m-2) \ldots (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n} a^n x^{m-n}$$

esprime il termine che ne ha n avanti di sè.

Quest' ultima formola si chiama il *termine generale* della serie

$$x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} a^2 x^{m-2} + \text{ec.},$$

perchè facendo successivamente

$$n = 1, \quad n = 2, \quad n = 3, \quad \text{ec.},$$

essa dà tutti i termini di questa serie.

142. Applichiamo ora la regola del numero precedente alla formazione dello sviluppo di $(x+a)^5$. Il primo termine essendo

$$x^5 \quad \text{o sia} \quad a^0 x^5 \quad (37),$$

il secondo sarà

$$\frac{5}{1} a^1 x^4 \quad \text{ovvero} \quad 5ax^4,$$

il terzo

$$\frac{5 \times 4}{2} a^2 x^3 \qquad \text{ovvero} \qquad 10a^2x^3,$$

il quarto

$$\frac{10 \times 3}{3} a^3 x^2 \qquad \text{cioè} \qquad 10a^3x^2,$$

il quinto

$$\frac{10 \times 2}{4} a^4 x \qquad \text{vale a dire} \qquad 5a^4x,$$

il sesto

$$\frac{5 \times 1}{5} a^5 x^0 \qquad \text{ossia} \qquad a^5.$$

Lo sviluppo si arresta qui, poichè per passare al termine seguente, bisognerebbe moltiplicare per l'esponente di x nel sesto termine: ora questo esponente è zero.

La medesima conseguenza pure si sarebbe ricavata dalla formola; giacchè il settimo termine avendo per coefficiente numerico

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6},$$

contiene nel caso attuale il fattore $m-5$, che diventa $5-5$ ossia zero; e questo medesimo fattore entrando nei termini che vengono appresso, li rende tutti nulli.

Riunendo intanto i termini precedentemente ottenuti, emerge

$$(x+a)^5 = x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5.$$

143. Si dedurrebbe in generale dalla formola del numero **141** lo sviluppo di una potenza qualunque di un binomio qualsivoglia. Se si avesse, per esempio, a formare la sesta potenza di $2x^3 - 5a^3$, basterebbe sostituire nella formola alle potenze di x e di a quelle di $2x^3$ e di $-5a^3$ rispettivamente; poichè se si facesse

$$2x^3 = x' \qquad \text{e} \qquad -5a^3 = a',$$

si avrebbe

$$(2x^3 - 5a^3)^6 = (x' + a')^6 = x'^6 + 6a'x'^5 + 15a'^2x'^4$$
$$+ 20a'^3x'^3 + 15a'^4x'^2$$
$$+ 6a'^5x' + a'^6 \quad (141),$$

e non resterebbe che a sostituire in luogo di x' e di a' le quantità da queste lettere rappresentate. Si troverebbe

$$(2x^3)^6 + 6(-5a^3)(2x^3)^5 + 15(-5a^3)^2(2x^3)^4$$
$$+ 20(-5a^3)^3(2x^3)^3 + 15(-5a^3)^4(2x^3)^2$$
$$+ 6(-5a^3)^5(2x^3) + (-5a^3)^6,$$

ovvero

$$64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12}$$
$$- 20000a^9x^9 + 37500a^{12}x^6$$
$$- 37500a^{15}x^3 + 15625a^{18}.$$

I termini di questo sviluppo sono alternativamente positivi e negativi; ed è manifesto che avverrà sempre lo stesso, tutte le volte che il secondo termine del binomio proposto avrà il segno —.

144. Si suol preparare la formola del numero 141 di una maniera che ne faciliti l'applicazione nei casi analoghi al precedente.

Osservando che

$$x^{m-1} = \frac{x^m}{x}, \quad x^{m-2} = \frac{x^m}{x^2}, \quad x^{m-3} = \frac{x^m}{x^3}, \text{ ec.,}$$

essa può venire scritta così:

$$x^m + \frac{m}{1}\frac{a}{x}x^m + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{a^2}{x^2}x^m + \text{ec.},$$

il che si riduce ad

$$x^m \left\{ 1 + \frac{m}{1}\frac{a}{x} + \frac{m(m-1)}{1\,.\,2}\frac{a^2}{x^2} \right.$$

$$\left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{a^3}{x^3} + \text{ec.} \right\},$$

isolando il fattore comune x^m. Per calcolare col mezzo di questa formola, bisognerà *formare la serie dei numeri*

$$\frac{m}{1}, \quad \frac{m-1}{2}, \quad \frac{m-2}{3}, \quad \frac{m-3}{4}, \text{ ec.},$$

moltiplicare in principio il primo per la frazione $\frac{a}{x}$, *poi il risultamento pel secondo, ed anche per la frazione* $\frac{a}{x}$, *poi ancora il risultamento pel terzo, e per la frazione* $\frac{a}{x}$, *e così di seguito; riunire tutti questi termini, aggiungere l'unità, ed in fine moltiplicare il tutto pel fattore* x^m.

Nell'esempio $(2x^3 - 5a^3)^6$ bisogna scrivere $(2x^3)^6$ in luogo di x^m, e $-\frac{5a^3}{2x^3}$ in vece di $\frac{a}{x}$. Lascerò al lettore la cura di effettuare il calcolo (*).

145. Si riduce facilmente lo sviluppo di una potenza d'un polinomio qualunque a quello delle potenze del binomio, come dimostrerò formando la terza potenza del trinomio $a+b+c$.

Fo dapprima $b+c=m$, ed ottengo

$$(a+b+c)^3 = (a+m)^3 = a^3 + 3a^2m + 3am^2 + m^3\,;$$

mettendo in seguito per m il binomio $b+c$ da essa rappre-

(*) La formola dello sviluppo di $(x+a)^m$ conviene a tutti i valori dell'esponente m, e si applica egualmente al caso in cui quest'esponente fosse frazionario, o negativo. Questa proprietà, che è importantissima, è dimostrata nel *Complemento* di questo Trattato.

sentato, avrò

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3.$$

Non resta ora che a sviluppare le potenze del binomio $b+c$, e ad eseguire sopra queste potenze le moltiplicazioni indicate, il che darà

$$\begin{array}{llll} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ \quad + 3a^2c + 6abc + 3b^2c \\ \qquad\qquad + 3ac^2 + 3bc^2 \\ \qquad\qquad\qquad + c^3. \end{array}$$

Dell' estrazione delle radici dalle quantità complesse.

146. Avendo esposta la composizione delle potenze delle quantità complesse, passo ora a trattare dell'estrazione delle loro radici, cominciando dalla radice cubica dei numeri.

Per eseguire l'estrazione della radice cubica dei numeri, bisogna prima d' ogn' altro conoscere i cubi dei numeri d' una sola cifra; questi si troveranno nella seconda linea della seguente tavola:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	8	27	64	125	216	343	512	729;

e siccome 1000 è il cubo di 10, così è manifesto che qualunque numero di tre cifre non contiene che il cubo d'un numero di una sola cifra.

La formazione del cubo d'un numero di due cifre si effettua d' una maniera analoga a quella del quadrato; poichè scomponendo questo numero in decine ed unità, e poscia denotando le prime con a e le seconde con b, risulta

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

il che mostra che *il cubo, o sia la terza potenza d'un numero composto di decine e di unità, contiene quattro parti, cioè: il cubo delle decine, tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità, tre volte le decine moltiplicate pel quadrato delle unità, ed in fine il cubo delle unità.*

Sia 47 il numero di cui si cerca la terza potenza; facen-

do $a = 4$ decine, ovvero 40, e $b = 7$ unità, si troverà

$$a^3 = 64000$$
$$3a^2b = 33600$$
$$3ab^2 = 5880$$
$$b^3 = 343$$

Totale. . . . . $103823 = 47 \times 47 \times 47.$

Per ritornare presentemente dal cubo 103823 alla sua radice 47, si osserverà dapprima che 64000, cubo delle 4 decine, non ha cifre significative d'un ordine inferiore alle migliaia; si può dunque, nella ricerca del cubo delle decine, fare astrazione dalle centinaia, dalle decine e dalle unità del numero 103823. Dopo queste considerazioni, disponendo l'operazione come per l'estrazione della radice quadrata, si separeranno le tre prime cifre sulla dritta con una virgola; allora il massimo cubo contenuto in 103 sarà quello delle decine. Si vedrà poi mediante la tavola precedente che questo cubo è 64, di cui la radice è 4; si porrà dunque 4 nel luogo assegnato alla radice. Si toglierà in seguito 64 da 103, ed a fianco al resto 39 si abbasseranno le tre ultime cifre.

```
103,823|47
 64    |48
-------
 398,23
```

Il resto totale 39823 conterrà ancora tre parti del cubo, cioè, tre volte il quadrato delle decine moltiplicato per le unità, ovvero $3a^2b$, tre volte le decine moltiplicate pel quadrato delle unità, ovvero $3ab^2$, ed il cubo delle unità, o sia b^3. Se si avesse il valore del prodotto $3a^2b$, siccome già si conoscono le decine a, dividendo questo prodotto per $3a^2$, si otterrebbero le unità b; ma quantunque non conoscasi $3a^2b$, si sa non pertanto che questo prodotto non deve avere alcuna cifra significativa di un ordine inferiore alle centinaia, poichè esso contiene il fattore a^2 che esprime il quadrato delle decine: tal prodotto non può dunque trovarsi che nella parte 398 che resta del numero 39823, dopo di averne separate le decine e le unità, parte che contiene in oltre le centinaia che provengono dal prodotto $3ab^2$ delle decine pel quadrato delle unità, e dal cubo b^3 delle unità.

Dividendo 398 per 48, che esprime, nell'esempio proposto, il triplo quadrato delle decine $3a^2$, ovvero 3×16, si troverà per quoziente 8; ma ciò che precede dimostra che non deve adottarsi questa cifra per le unità della radice cercata senza averla prima verificata, e ciò si fa formando le tre parti del cubo che deggiono esser contenute nel resto 39823.

Facendo $b = 8$, si trova

$$3a^2b = 38400$$
$$3ab^2 = 7680$$
$$b^3 = 512$$

Totale . . . . . 46592 ;

e questo risultamento sorpassando 39823, fa vedere che bisogna diminuire il numero 8 preso per le unità. Saggiando 7 della stessa maniera, si vedrà che esso soddisfa alle condizioni, e che per conseguenza 47 è la radice dimandata.

In vece di fare la verificazione che ho adoperata, si preferisce d' ordinario di elevare immediatamente a cubo il numero che è espresso dalle due cifre trovate, moltiplicandolo pel suo quadrato. Operando in questa maniera sopra 48, si troverà

$$48 \times 48 \times 48 = 110592,$$

e questo numero essendo più grande del proposto 103823, mostra pure che la cifra 8 è troppo grande.

147. Ciò che si è praticato nel precedente esempio deve eseguirsi sopra tutti i numeri espressi da più di tre cifre, e meno di 7. Avendo separate le tre prime verso la dritta, si cercherà il massimo cubo contenuto nella parte che resta a sinistra; si porterà la sua radice al luogo che l'è destinato; si toglierà questo cubo dalla parte del numero proposto sulla quale si è operato; a fianco al resto si abbasseranno le tre ultime cifre; si separeranno le decine e le unità, e si dividerà ciò che resta a sinistra pel triplo del quadrato delle decine trovate; ma prima di scrivere il quoziente alla radice, lo si verificherà, elevando a cubo il numero espresso da questa cifra unita alle decine cognite. Se il risultamento di questa operazione sarà troppo grande, si diminuirà la cifra delle unità; si procederà ad una nuova verificazione, e così di seguito, fino a che si troverà un risultamento uguale al numero proposto, o più piccolo di questo numero, se desso non è un cubo perfetto. In questo caso la radice trovata non è che quella del massimo cubo contenuto in esso. Siccome si hanno spesso residui molto alti, ecco come potrà conoscersi se la cifra delle unità sia troppo piccola.

Il cubo di $a + b$, allorchè si fa $b = 1$, diventa quello

di $a+1$, od ha per espressione

$$a^3+3a^2+3a+1,$$

quantità che sorpassa a^3, cubo di a, di

$$3a^2+3a+1.$$

Segue da ciò, che *fino a quando il resto di una estrazione di radice cubica sarà minore di tre volte il quadrato della radice, più tre volte la radice, più l'unità, questa radice non sarà troppo piccola.*

149. Per estrarre la radice da 105823817, si osserverà dapprima che, qualunque sia il numero delle cifre di questa radice, se essa si decompone in unità e decine, il cubo di questo ultimo non potrà far parte delle tre ultime cifre verso la dritta, e dovrà per conseguenza trovarsi in 105823. Ma il massimo cubo contenuto in 105823 avrà più d'una cifra alla sua radice, la quale potrà per conseguenza scomporsi in unità e decine; ed il cubo di queste decine non discendendo al disotto delle migliaia, non potrà far parte delle tre ultime cifre 823. Se, dopo la separazione di queste cifre, restassero ancora più di tre cifre sulla sinistra, si ripeterebbe il ragionamento precedente, e si perverrebbe così a notare il luogo del cubo delle unità dell'ordine il più elevato della radice cercata, dividendo il numero proposto in membri, ovvero classi, di tre cifre, andando da dritta a sinistra, l'ultimo potendo contenerne meno di tre.

Ciò posto, dopo di aver preparata l'operazione secondo il solito, si cercherà primieramente con la regola del numero precedente la radice cubica dei due primi membri a sinistra, e si troverà 47 per risultamento; si toglierà il cubo di questo numero dai due membri che lo contengono; a fianco al resto 2000 si abbasserà il membro seguente 817, ed il numero 2000817 deve racchiudere le tre ultime parti del cubo d'un numero di cui 47 esprime le decine, e di cui si cercano le unità: si troveranno dunque queste unità, come nell'esempio del numero citato, separando le due ultime cifre sulla dritta del resto, e dividendo la parte a sinistra per 6627, triplo del quadrato di 47. Si verificherà il quoziente 3 elevando 473 a cubo, e si troverà per risultamento precisamente il numero proposto, perchè questo numero è un cubo perfetto.

105,8 23,817	473
64	
41 8,23	48
103 8 23	6627
2 0 008,17	
105 8 238 17	
000 0 000 00	

La spiegazione dell'esempio esaminato qui sopra può tener luogo di regola generale. Se il numero proposto avesse una classe di più, si continuerebbe l'operazione come si è fatto per la terza; e non bisognerebbe dimenticarsi di mettere un zero alla radice, se il numero a dividersi sulla sinistra del resto non contenesse quello pel quale bisogna dividerlo: si abbasserebbe allora la classe seguente, e si opererebbe su di questa classe riunita al resto, come sulle precedenti.

149. *Poichè il cubo di una frazione si ottiene moltiplicando questa frazione pel di lei quadrato, o, ciò che torna lo stesso, cubando il suo numeratore e cubando il suo denominatore*, ne segue che *si ricaderà sulla radice, prendendo quella del nuovo numeratore e quella del nuovo denominatore.* Il cubo di $\frac{5}{6}$, per esempio, è $\frac{125}{216}$; prendendo la radice cubica di 125 e quella di 216, si ritrova $\frac{5}{6}$.

Questo è il metodo che bisogna seguire allorchè il numeratore ed il denominatore sono tutti e due cubi perfetti: ma quando ciò non ha luogo, si risparmia di estrarre la radice dal denominatore, moltiplicando pel suo quadrato i due termini della frazione proposta; poichè il denominatore risultante da questa operazione viene ad essere il cubo del denominatore primitivo, e non resta a prendere che la radice del numeratore. Se si avesse, a cagion d'esempio, $\frac{3}{5}$, moltiplicando i due termini di questa frazione per 25, quadrato del denominatore, si avrebbe

$$\frac{75}{5\times5\times5};$$

la radice del denominatore è 5: quanto a quella di 75, si trova che essa cade tra 4 e 5. Limitandosi a 4, si avrà $\frac{4}{5}$ per la radice cubica di $\frac{3}{5}$, a meno d'un quinto circa. Per avere

una maggiore esattezza, bisognorà estrarre la radice approssimata da 75 coi metodi cho indicherò qui appresso.

Allorchè il denominatore sarà già un quadrato perfetto, basterà moltiplicare i due termini della frazione per la radice quadrata del denominatore. Così, per trovare la radice cubica di $\frac{4}{9}$, moltiplico i due termini per 3, radice quadrata di 9, ed ottengo

$$\frac{12}{3 \times 3 \times 3};$$

prendendo la radice del cubo massimo 8 contenuto in 12, viene $\frac{2}{3}$ per la radice cercata, a meno d' un terzo.

150. Da quanto è stato dimostrato nei n^ri^ 97, 98 e 126 segue che le potenze delle frazioni irriducibili sono frazioni pure irriducibili, e che per conseguenza la radice cubica di un numero cho non è cubo perfetto, non può esprimersi esattamente con alcuna frazione, per quanto grande sia il suo denominatore: essa è dunque una quantità irrazionale, ma di una specie differente dalla radice quadrata; poichè il più delle volte è impossibile di esprimere l' una per mezzo dell' altra.

151. Si potrebbe ottenere la radice cubica approssimata per mezzo delle frazioni ordinarie, servendosi d' un procedimento analogo a quello che ho fatto conoscere nel n° 103 sulla radice quadrata, e troppo facile ad immaginarsi; per cui passo oltre, tanto più che si è conosciuto che riuscirebbe poco comodo.

La miglior maniera di adoperare le frazioni ordinarie per questa ricerca consiste nell' estrarre la radice in frazioni d'una specie data. Affine di conseguire, per esempio, la radice cubica di 22, a meno d'un quinto d'unità, si osserverà che il cubo di $\frac{1}{5}$ è $\frac{1}{125}$, e si ridurrà per conseguenza 22 in $\frac{2750}{125}$: la radice di 2750, essendo presa in numero intero, si avrà $\frac{14}{5}$, ovvero $2\frac{4}{5}$, per quella di 22.

152. Il mezzo che è più in uso onde estrarre per approssimazione la radice cubica d'un numero, consiste nel con-

vertire questo numero in frazione decimale, osservando però che ciò non può essere che in millesimi, o in milionesimi, ec., perchè i decimi divengono millesimi allorchè si elevano a terza potenza, i centesimi si cangiano in milionesimi, ed in generale *il numero delle cifre decimali che si trovano nel cubo è triplo di quello delle cifre decimali contenute nella radice*. Bisogna conchiudere da ciò, che conviene mettere appresso al numero proposto tanti zeri, quanto è il triplo de'decimali che si vogliono nella di lui radice. Si estrarrà in seguito la radice con le regole date precedentemente, e si separerà nel risultamento il domandato numero di cifre decimali.

Se si volesse avere, per esempio, la radice cubica di 327, a meno d'un centesimo circa, si scriverebbero sei zeri appresso a questo numero, e si estrarrebbe, secondo la data regola, la radice da 327000000. Eccone l'operazione:

Si separerebbero in seguito due cifre decimali sulla dritta del risultamento, e si avrebbe 6,88; ma sarà meglio prendere 6,89, perchè il cubo di quest'ultimo numero, benchè maggiore di 327, vi si approssima più di quello di 6,88.

Se il numero proposto contenesse già decimali, prima di cominciare l'estrazione della radice, bisognerebbe mettere alla sua dritta quanti zeri sarebbero necessari per rendere il numero delle cifre decimali multiplo di 3. Sia, per esempio, 0,07; si scriverà 0,070: prendendo la radice di 70 millesimi, si troverà 0,4. Per spingere l'esattezza fino ai centesimi, bisognerebbe mettere altri tre zeri di più, ciò che farebbe 0,070000. La radice di 70000, estratta in numeri interi, essendo 41, quella di 0,07, a meno d'un centesimo circa, sarebbe 0,41.

153. Dopo di aver somministrati i mezzi per estrarre la ra-

dice quadrata o la radice cubica dai numeri, la formola del binonio conduce ad un andamento analogo per ottenere la radice d'un grado qualunque; ma prima di esporre questo andamento, farò alcune osservazioni sulla estrazione delle radici l'esponente delle quali è un numero che ha divisori.

L'estrazione della radice quarta può effettuarsi col mezzo di due estrazioni successive della radice quadrata; poichè prendendo prima la radice quadrata di una quarta potenza, di a^4, per esempio, si cade sul quadrato, ovvero a^2, risultamento di cui la radice quadrata è a, o sia la quantità cercata.

Si vedrà della stessa maniera che tre estrazioni successive della radice quadrata equivalgono all'estrazione della radice ottava, poichè la radice quadrata di a^8 è a^4, quella di a^4 è a^2, ed in fine quella di a^2 è a.

Egli è evidente che di questa maniera ogni radice d'un grado indicato da qualcheduno dei numeri 2,4,8,16,32, ec., cioè a dire da una potenza di 2, si otterrà con una serie di estrazioni della radice quadrata.

Le radici i cui esponenti non sono numeri primi, possono ridursi ad altre d'un grado meno elevato; la radice sesta, per esempio, si otterrà con una estrazione della radice quadrata seguita da un'estrazione della radice cubica. Per convincersene, basta osservare che operando così sopra di a^6, si trova dapprima a^3, e poi a: si potrebbe ancora prendere prima la radice cubica, il che darebbe a^2, indi la radice quadrata, e si avrebbe a.

154. Passo ora al metodo generale, che applicherò al quinto grado. Il suo andamento potrà più facilmente comprendersi sopra un caso particolare; e paragonandolo a quelli che ho già dati per l'estrazione della radice quadrata e per quella della radice cubica, si vedrà senza pena come bisogna operare per un grado qualunque.

Sia intanto da estrarsi la radice quinta da 231554007. Osservo in primo luogo che il più piccolo numero di 2 cifre, cioè a dire 10, ne ha sei alla sua quinta potenza, che è 100000, e ne conchiudo che la radice quinta del numero proposto ha almeno due cifre: potrò dunque rappresentare questa radice con $a+b$, a essendo le decine e b le unità; ed il numero proposto avrà per espressione

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + \text{ec.}$$

Non sviluppo tutti i termini di questa potenza, perchè basta conoscere la composizione dei due primi, come si vedrà or ora.

Ciò posto, egli è evidente che a^5, ossia la quinta potenza delle decine di questa radice, non potendo discendere al di sotto delle centinaia di migliaia, non fa parte delle cinque prime cifre a dritta: separo adunque queste cinque cifre. Se ne restassero più di cinque a sinistra, farei riguardo a queste lo stesso ragionamento di poc' anzi, e scompartirei così il numero proposto in membri di cinque cifre, andando da dritta a sinistra; l' ultimo di questi membri verso la sinistra conterrà la quinta potenza delle unità dell' ordine il più elevato che sia nella radice.

Formando le quinte potenze dei numeri d' una sola cifra, riconosco che 2315 cade tra la quinta potenza di 4, che è 1024, e quella di 5, che è 3125.

2315,54007	47
1024	
1291 5,4007	1280

Prendo dunque 4 per le decine della radice cercata; e togliendo la quinta potenza di questo numero, ovvero 1024, dal primo membro del numero proposto, ho di resto 1291, a fianco al quale abbasso il membro seguente. Il numero che ne risulta dee contenere i termini $5a^4b + 10a^3b^2 +$ ec. che restano di $(a+b)^5$, dopo che se n'è tolto a^5; ma il più elevato di questi termini è $5a^4b$, ossia cinque volte la quarta potenza delle decine moltiplicata per le unità, perchè esso non discende al di sotto delle decine di migliaia. Per considerarlo in particolare, si separeranno le 4 ultime cifre sulla dritta, che non ne fanno parte, ed il numero 12915 che resta a sinistra, conterrà questo termine una con le decine di migliaia provenienti dai termini che lo seguono. Si vede dunque che dividendo 12915 per $5a^4$, ovvero cinque volte la quarta potenza delle 4 decine trovate, non si perverrà che ad una approssimazione fino alle unità. La quarta potenza di 4 è 256; il suo quintuplo si eleva a 1280; dividendo 12915 per 1280, si troverebbe 10 per quoziente; ma non si potrebbe mettere più di 9 alla radice, e bisogna ancora, prima di adottare questa cifra, saggiare se la radice 49 data da essa quando si aggiunge alle 4 decine che di già si hanno, non produca una quinta potenza più grande del numero proposto. Si trova di questa maniera che bisogna diminuire il numero 49 di due unità, e che la vera radice è 47, con un resto uguale a 2209000; poichè la quinta potenza di 47 è 229345007; cioè a dire che la radice esatta del numero proposto cade tra 47 e 48.

Se vi fosse un membro di più, si abbasserebbe per unirlo al resto della sottrazione della quinta potenza delle due cifre di già trovate dai due primi membri; si opererebbe su questo resto come si è fatto sul precedente, e così di seguito.

Dietro ciò che si è detto, è facile estendere al caso attuale

le regole date tanto per estrarre la radice quadrata e la radice cubica delle frazioni, quanto per approssimare al vero le radici delle potenze imperfette di questi gradi.

155. Per mezzo di procedimenti fondati sugli stessi principii, si perviene ad estrarre le radici delle quantità letterali: l'esempio seguente basterà per indicare come si debba operare per un grado qualunque.

Si è trovata nel n° 143 la sesta potenza di $2x^3 - 5a^3$; riprendo questa potenza per estrarne la radice sesta, e per questo la dispongo come segue:

$$\begin{array}{l|l} \;\;\,64x^{18} - 960a^3x^{15} + 6000a^6x^{12} - 20000a^9x^9 & \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 37500a^{12}x^6 - 37500a^{15}x^3 & 2x^3 - 5a^3 \\ -64x^{18} \qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 15625a^{18} & \overline{} \\ \hline \text{resto} \quad - 960a^3x^{15} + \text{ec.} & 192x^{15} \end{array}$$

La quantità proposta essendo ordinata rapporto ad x, il suo primo termine dev' essere la sesta potenza del primo termine della radice ordinata della stessa maniera; prendendo in conseguenza la radice sesta di $64x^{18}$, secondo la regola del n° 129, si ha $2x^3$.

Elevando questo risultamento a sesta potenza, e sottraendolo dalla quantità proposta, il resto che si ottiene, comincia necessariamente dal secondo termine dello sviluppo della sesta potenza dei due primi termini della radice. Ora nella espressione

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + \text{ec.}$$

questo termine è il prodotto di sei volte la quinta potenza del primo termine della radice pel secondo; e se si dividesse per $6a^5$, il quoziente sarebbe il secondo termine b. Bisogna dunque formare il sestuplo della quinta potenza del primo termine $2x^3$ della radice, il che darà

$$6 \times 32x^{15} \qquad \text{ovvero} \qquad 192x^{15},$$

e dividere per questa quantità il termine $-960a^3x^{15}$, col quale principia il resto dell'operazione precedente; il quoziente $-5a^3$ è il secondo termine della radice. Per verificarlo, si eleverebbe a sesta potenza il binomio $2x^3 - 5a^3$; ed il risultamento darebbe la quantità proposta.

Se la radice dovesse contenere un termine di più, si tro-

verebbe, dopo l'operazione ora fatta, un secondo resto che principierebbe col sestuplo del prodotto della quinta potenza dei due primi termini della radice pel terzo, e che bisognerebbe in conseguenza dividere per 6 $(2x^3 - 5a^3)^5$: il quoziente sarebbe questo terzo termine della radice; e si verificherebbe formando la sesta potenza dei tre termini trovati. Si procederebbe allo stesso modo per trovare tutti i termini seguenti, qualunque ne fosse il numero.

Delle equazioni a due termini.

156. Ogni equazione ove l'incognita si trova elevata alla medesima potenza in ciascuno dei termini che la contengono, può sempre ridursi a due termini, dei quali uno è l'aggregato di tutti i termini che contengono l'incognita, e l'altro costa della riunione di tutti i termini noti: ciò è stato osservato di già relativamente al secondo grado nel n° **105**, ed è facile concepirlo per un grado qualunque.

Se si ha, per esempio, l'equazione

$$a^2x^5 - a^5b^2 = b^4c^3 + acx^5,$$

trasportando tutti i termini affetti da x in un solo membro, se ne dedurrà

$$a^2x^5 - acx^5 = b^4c^3 + a^5b^2,$$

ovvero
$$(a^2 - ac)\,x^5 = b^4c^3 + a^5b^2.$$

Se ora si rappresentano le quantità

$$a^2 - ac \quad \text{con} \quad p, \qquad b^4c^3 + a^5b^2 \quad \text{con} \quad q,$$

l'equazione precedente diverrà

$$px^5 = q;$$

ed isolando la quantità x^5, si avrà

$$x^5 = \frac{q}{p},$$

da cui si dedurrà

$$x = \sqrt[5]{\frac{q}{p}}.$$

In generale ogni equazione a due termini venendo ridotta alla forma

$$px^m = q\,,$$

dà allora

$$x^m = \frac{q}{p}\,;$$

e prendendo la radice del grado m di ciascun membro, si ha

$$x = \sqrt[m]{\frac{q}{p}}\,.$$

157. Bisogna osservare che quando l'esponente m è un numero dispari, il radicale non avrà che un solo segno, che sarà quello della quantità affetta da esso radicale (131).

Quando poi l'esponente m sarà pari, il radicale avrà il doppio segno $\pm$; di più esso in tal caso sarà immaginario se la quantità $\frac{p}{q}$ è negativa, e la quistione sarà assurda, come pel secondo grado (131). Ecco alcuni esempi.

L'equazione $x^5 = -1024$ dà

$$x = \sqrt[5]{-1024} = -4\,,$$

perchè l'esponente 5 è dispari.

L'equazione $x^4 = 625$ dà

$$x = \pm\sqrt[4]{625} = \pm 5\,,$$

perchè l'esponente 4 è pari.

In fine l'equazione $x^4 = -16$ dando

$$x = \pm\sqrt[4]{-16}\,,$$

non conduce che a valori immaginari, perchè l'esponente 4 essendo pari, la quantità posta sotto il radicale è negativa.

158. Prima di andare più innanzi, esporrò un fatto analitico che sarà utilissimo, tanto pel rimanente di quest'opera,

quanto pel di lei *Complemento*, e che per sè stesso è assai notabile : questo fatto analitico è, che tutte le espressioni $x - a$, $x^2 - a^2$, $x^3 - a^3$, ed in generale $x^m - a^m$ (m essendo un numero intero positivo qualunque) sono esattamente divisibili per $x - a$. Per la prima espressione la cosa è evidente; si sa inoltre che la seconda

$$x^2 - a^2 = (x - a)(x + a) \quad (34),$$

e con la divisione si scomporrebbero facilmente le altre. Dividendo parimente $x^m - a^m$ per $x - a$, si troverebbe per quoziente

$$x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} + \text{ ec.},$$

l'esponente di x andando sempre diminuendo di un'unità, e quello di a aumentando nella stessa maniera; ma in vece di andare appresso alle particolarità di questa operazione, stabilirò immediatamente l'equazione

$$\frac{x^m - a^m}{x - a} = x^{m-1} + ax^{m-2} + a^2x^{m-3} \dots + a^{m-2}x + a^{m-1},$$

la quale può verificarsi, moltiplicando il secondo membro per $x - a$. Esso secondo membro diventa allora

$$x^m + ax^{m-1} + a^2x^{m-2} \dots\dots\dots\dots + a^{m-2}x^2 + a^{m-1}x$$

$$- ax^{m-1} - a^2x^{m-2} - a^3x^{m-3} \dots\dots\dots\dots - a^{m-1}x - a^m;$$

tutti i termini della prima linea, a partire dal secondo, essendo gli stessi, ad eccezione del segno, che quelli i quali precedono l'ultimo della seconda linea, resta, dopo la riduzione, solamente $x^m - a^m$; vale a dire, il dividendo proposto.

Bisogna osservare che di seguito al termine a^2x^{m-2} viene necessariamente nella linea superiore il termine a^3x^{m-3}, che si trova distrutto dal suo corrispondente inferiore; e che parimente nella linea inferiore si trova avanti al termine $a^{m-1}x$ un termine $- a^{m-2}x^2$, che distrugge il suo corrispondente superiore. Questi termini non sono scritti, perchè si sottintendono compresi nella lacuna indicata dai punti.

159. Questa osservazione conduce a conseguenze importantissime relativamente all' equazione a due termini $x^m = \frac{q}{p}$.

Denotando con a il numero che si ottiene coll' estrazione immediata della radice, eseguita secondo le regole del n° 154, si ha

$$\frac{q}{p} = a^m \quad \text{ovvero} \quad x^m = a^m;$$

e trasportando il secondo membro nel primo, viene

$$x^m - a^m = 0.$$

La quantità $x^m - a^m$ si divida per $x - a$, e si otterrà, pel numero precedente,

$$x^m - a^m = (x-a)(x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1}):$$

quest' ultimo risultamento, che svanisce quando $x = a$, diverrebbe egualmente nullo se si avesse

$$x^{m-1} + ax^{m-2} \ldots\ldots + a^{m-2}x + a^{m-1} = 0 \quad (116);$$

e se esistesse in conseguenza un valore di x che soddisfacesse a quest' ultima equazione, esso soddisfarebbe ugualmente alla proposta.

Questi valori hanno coll' unità relazioni semplicissime, che si scopriranno facendo $x = ay$; con ciò l' equazione $x^m - a^m = 0$ diverrà

$$a^m y^m - a^m = 0 \quad \text{ovvero} \quad y^m - 1 = 0,$$

e si otterranno i valori di x moltiplicando quelli di y pel numero a.

L' equazione $y^m - 1$ dà in primo luogo

$$y^m = 1, \qquad y = \sqrt[m]{1} = 1;$$

poi, dividendo $y^m - 1$ per $y - 1$, viene

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} \ldots\ldots + y^2 + y + 1;$$

e questo quoziente essendo eguagliato a zero, dà l'equazione dalla quale dipendono gli altri valori di y, che avranno, al pari dell'unità, la proprietà di soddisfare all'equazione

$$y^m - 1 = 0 \quad \text{ovvero} \quad y^m = 1,$$

cioè a dire che la loro potenza del grado m sarà l'unità.

Da ciò risulta questa conseguenza, singolare a prima vista, che l'unità può avere altre *radici* oltre sè stessa.

Queste radici, che sono negative o immaginarie, sono malgrado ciò di un uso frequente nell'analisi; ma non posso far conoscere presentemente che quelle dei quattro primi gradi, imperocchè col mezzo di ciò che precede solamente per questi gradi può risolversi l'equazione

$$y^{m-1} + y^{m-2} \ldots\ldots + 1 = 0$$

che le dà.

Sia 1.° $m = 2$; si avrà

$$y^2 - 1 = 0,$$

da cui si trae

$$y = +1, \qquad y = -1.$$

2.° Facendo $m = 3$, viene

$$y^3 - 1 = 0,$$

da cui si deduce prima

$$y = 1,$$

e poi

$$y^2 + y + 1 = 0.$$

Quest' ultima equazione essendo risoluta, dà

$$y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \qquad y = \frac{1 - \sqrt{-3}}{2};$$

così si hanno per questo grado le tre radici

$$y = 1, \quad y = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad y = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Le due ultime sono immaginarie; ma se se ne fa il cubo, formando con le regole date nel numero 34 quello del numeratore, e se si osserva che il quadrato di $\sqrt{-3}$ essendo -3, il di lui cubo è $-3\sqrt{-3}$, si troverà pure $y^3 = 1$, come per la radice $y = 1$.

3.° Prendendo $m = 4$, si ha

$$y^4 - 1 = 0,$$

da cui si cava

$$y = 1,$$

poi

$$y^3 + y^2 + y + 1 = 0,$$

che si riduce ad

$$y^2(y+1) + y + 1 = (y+1)(y^2+1) = 0,$$

e di qui si trae

$$y + 1 = 0, \quad \text{oppure} \quad y^2 + 1 = 0,$$

equazioni che danno

$$y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1}:$$

le quattro radici della proposta equazione sono dunque

$$y = +1, \quad y = -1, \quad y = +\sqrt{-1}, \quad y = -\sqrt{-1}.$$

Di questi quattro valori due solamente sono reali, e gli altri due immaginari.

Coteste quattro radici si sarebbero anche trovate osservando che

$$y^4 - 1 = (y^2 - 1)(y^2 + 1),$$

donde risulta successivamente

$$y^2 - 1 = 0, \quad y^2 + 1 = 0.$$

Questa moltiplicità di radici dell'unità dipende da una legge generale delle equazioni, in virtù della quale un'incognita ammette tanti valori quante sono le unità dell'esponente del grado dell'equazione che la determina; e quando la qui-

stione non comporta questo numero di soluzioni reali, esso è completato da simboli puramente algebrici, i quali, venendo sottomessi alle operazioni indicate nell' equazione, la verificano.

Segue da ciò, che le radici dei numeri hanno due specie di espressioni o di valori; la prima, che chiamerò *determinazione aritmetica*, è il numero che si trova col metodo esposto nel n° 154, e che è unica per ciascun caso particolare; la seconda comprende i valori negativi e le espressioni immaginarie, che distinguerò col nome di *determinazioni algebriche*, perchè esse non debbono la loro esistenza che alla combinazione dei segni dell' Algebra.

Delle equazioni che possono essere risolute come quelle del secondo grado.

160. Il carattere di queste equazioni consiste in questo, che desse non contengono che due potenze differenti dell' incognita, e che l' esponente dell' una è doppio di quello dell' altra; la loro formola generale è

$$x^{2m} + px^m = q\,,$$

p e q essendo quantità cognito.

Se si prende dapprima x^m per l' incognita, ovvero se si pone $x^m = u$, si avrà

$$x^{2m} = u^2\,,$$

e di qui

$$u^2 + pu = q\,,$$

$$u = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} \quad (109);$$

rimettendo x^m per u, verrà

$$x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2}\,,$$

equazione a due termini, poichè l' espressione

$$-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

non contenendo che operazioni conosciute, da effettuarsi sopra quantità date, deve riguardarsi come quantità del tutto nota.

Rappresentando con a e con a' i due valori di questa espressione, si avrà

$$x^m = a \qquad \text{ed} \qquad x^m = a',$$

donde si trarrà

$$x = \sqrt[m]{a} \qquad \text{ed} \qquad x = \sqrt[m]{a'}.$$

Se l' esponente m fosse pari, in vece dei due valori scritti qui sopra, se ne avrebbero quattro, poichè ciascun radicale sarebbe suscettibile del segno $\pm$: ne verrebbe

$$x = +\sqrt[m]{a}, \quad x = -\sqrt[m]{a},$$

$$x = +\sqrt[m]{a'}, \quad x = -\sqrt[m]{a'};$$

e questi quattro valori sarebbero reali se le quantità a ed a' fossero positive.

Tutti i valori di x saranno compresi in una sola formola, indicando immediatamente la radice dei due membri dell' equazione

$$x^m = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2},$$

l che darà

$$x = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{q+\frac{1}{4}p^2}}.$$

Il problema seguente conduce ad un' equazione di questo genere.

161. *Risolvere il numero* 6 *in due fattori tali, che la somma dei loro cubi sia* 35.

Sia x uno di questi fattori, l'altro sarà $\frac{6}{x}$, e si avrà, mediante la somma dei loro cubi x^3 e $\frac{216}{x^3}$, l'equazione

$$x^3+\frac{216}{x^3}=35,$$

che riducesi ad

$$x^6+216=35x^3,$$

ovvero ad

$$x^6-35x^3=-216.$$

Se si riguarda x^3 come l'incognita, si otterrà, con la regola delle equazioni del secondo grado,

$$x^3=\frac{35}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2-216}.$$

Effettuando i calcoli numerici indicati, si troverà

$$\left(\frac{35}{2}\right)^2=\frac{1225}{4},$$

$$\sqrt{\left(\frac{35}{2}\right)^2-216}=\sqrt{\frac{361}{4}}=\frac{19}{2},$$

e per conseguenza

$$x^3=\frac{35}{2}+\frac{19}{2}=\frac{54}{2}=27,$$

$$x^3=\frac{35}{2}-\frac{19}{2}=\frac{16}{2}=8,$$

dondo

$$x=\sqrt[3]{27}=3\,,$$

$$x=\sqrt[3]{8}=2.$$

Il primo valore dà pel secondo fattore $\frac{6}{3}$, ovvero 2, mentre il secondo valore conduce a $\frac{6}{2}$, ovvero a 3; si ha dunque in un caso 3 e 2 pei fattori cercati, e nell'altro 2 e 3. Queste due soluzioni non differiscono adunque l'una dall'altra che per un cangiamento d'ordine nei fattori del numero dato 6.

162. Le equazioni che ho considerato ora, sono egualmente comprese nella legge generale enunciata nel n° 159; poichè bisogna moltiplicare i valori di $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{a'}$ per le radici dell' unità nel grado m.

Applicando questa considerazione all' equazione

$$x^6-35x^3=-216\,,$$

si troveranno le sei radici seguenti:

$$x=1\times 3\,,\qquad\qquad x=1\times 2$$

$$x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times 3\,,\qquad\qquad x=\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\times 2,$$

$$x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times 3\,,\qquad\qquad x=\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\times 2\,,$$

di cui le due prime sono le sole reali.

Del calcolo dei radicali.

163. Il gran numero dei casi nei quali le radici non possono estrarsi esattamente, e la lunghezza dell'operazione necessaria a fine di ottenerle per approssimazione, hanno indotto gli algebristi a proccurare di eseguire immediatamente sulle quantità sottomesse ai segni radicali le operazioni fondamentali indicate sulle di loro radici, ed a renderne, per quanto era possibile, più semplici i risultamenti, di maniera che l'estrazione della radice, che è l'operazione la più complicata, fosse stata rimessa alla fine del calcolo, per non doverla praticare che sopra i più piccoli numeri o sulle espressioni le più semplici che le quistioni proposte potessero comportare.

L'addizione e la sottrazione delle quantità radicali dissimili non possono che indicarsi coi segni $+$ e $-$. Per esempio, le somme

$$\sqrt[3]{a}+\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b},$$

le differenze

$$\sqrt[3]{a}-\sqrt[5]{a}, \qquad \sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$$

non sono suscettibili di altra espressione.

Non sarebbe lo stesso della quantità

$$4a\sqrt[3]{2b}+\sqrt[3]{16a^3b}-\frac{5c}{ad}\sqrt[3]{2a^6b},$$

perchè i radicali che la compongono possono divenir simili col mezzo della semplicizzazione indicata nel n° 130. Si osserverebbe dapprima che

$$\sqrt[3]{16a^3b}=\sqrt[3]{8a^3 \,.\, 2b} \qquad \text{ovvero a} \qquad 2a\sqrt[3]{2b},$$

$$\sqrt[3]{2a^6b}=\sqrt[3]{a^6 \,.\, 2b} \qquad \text{ovvero ad} \qquad a^2\sqrt[3]{2b};$$

così verrebbe

$$4a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt[3]{2b}-\frac{5a^2c}{ad}\sqrt[3]{2b},$$

e riducendo, si otterrebbe

$$6a\sqrt[3]{2b}-\frac{5ac}{d}\sqrt[3]{2b} \qquad \text{ovvero} \qquad (6d-5c)\frac{a}{d}\sqrt[3]{2b}.$$

164. Relativamente alle altre operazioni, il calcolo dei radicali è fondato sopra questo principio altra volta citato: *Se si elevano i differenti fattori di un prodotto ad una medesima potenza, il prodotto sarà elevato a questa potenza.* Da un altro lato è manifesto, che una quantità radicale si eleva alla potenza dello stesso esponente di questo radicale, togliendo via il segno radicale. Per esempio, $\sqrt[7]{a}$ elevata alla settima potenza, è a solamente, poichè quest' operazione, inversa di quella indicata dal segno $\sqrt[7]{}$, non fa che ridurre al suo stato primiero la quantità a.

Ciò posto, se, per esempio, nell' espressione

$$\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}$$

si tolgono i radicali, il risultamento ab sarà la settima potenza del prodotto indicato qui sopra; e prendendo la radice settima, se ne conchiuderà

$$\sqrt[7]{a}\times\sqrt[7]{b}=\sqrt[7]{ab}.$$

Questo ragionamento, che può applicarsi ad ogni altro caso, dimostra che, *per moltiplicare due espressioni radicali dello stesso grado, bisogna fare il prodotto delle quantità sottoposte ai radicali, e poi sottoporlo ad un radicale dello stesso grado.*

Per mezzo di questa regola si ha

$$3\sqrt{2ab^3} \times 7\sqrt{5a^3bc} = 21\sqrt{10a^4b^4c} =$$

$$21a^2b^2\sqrt{10c};$$

$$4\sqrt{a^2-b^2} \times \sqrt{a^2+b^2} = 4\sqrt{(a^2-b^2)(a^2+b^2)} =$$

$$4\sqrt{a^4-b^4};$$

$$\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4}} \times \sqrt[5]{\frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{2a^9-a^3b^6}{a^4-b^4} \times \frac{a^2b^3c^2+b^5c^2}{d^2}}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{a^3(2a^6-b^6)}{a^4-b^4} \times \frac{b^3c^2}{d^2}(a^2+b^2)}$$

$$=\sqrt[5]{\frac{a^3b^3c^2}{d^2} \times \frac{2a^6-b^6}{a^2-b^2}},$$

per la ragione che

$$a^4-b^4=(a^2+b^2)(a^2-b^2).$$

165. Se si considera che la settima potenza dell'espressione $\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}$, per esempio, è $\frac{a}{b}$, si conchiuderà, prendendo la

radice settima di quest' ultimo risultamento, che

$$\frac{\sqrt[7]{a}}{\sqrt[7]{b}}=\sqrt[7]{\frac{a}{b}};$$

e da ciò segue che, *per dividere l'una per l'altra due quantità radicali dello stesso grado, bisogna prendere il quoziente delle quantità sottomesse ai radicali, ed apporvi un radicale dello stesso grado.*

Si trova con questa regola che

$$\frac{\sqrt{6ab}}{\sqrt{3a}}=\sqrt{\frac{6ab}{3a}}=\sqrt{2b};$$

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{a+b}}=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a+b}}=\sqrt{a-b};$$

$$\frac{\sqrt[5]{a^4b}}{\sqrt[5]{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4b}{b^3c^2}}=\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^2c^2}}.$$

166. Segue dalla regola della moltiplicazione dei radicali dello stesso grado, data nel n° 164, che, *per elevare una quantità radicale ad una potenza qualunque, basta elevare a questa potenza la quantità sottomessa al radicale, ed assoggettare il risultamento a questo stesso radicale*; poichè, per esempio, elevare $\sqrt[5]{ab}$ a terza potenza, è lo stesso che effettuare il prodotto

$$\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab}\times\sqrt[5]{ab};$$

e come i radicali sono dello stesso grado, bisogna (164) moltiplicare tra loro le quantità affette da essi, e poi mettere il pro-

dotto sotto il radicale, il che dà

$$\sqrt[5]{a^3b^3}\,.$$

Similmente $\sqrt[7]{a^2b^3}$ elevato a quarta potenza, dà $\sqrt[7]{a^8b^{12}}$, che riducesi ad

$$ab\sqrt[7]{ab^5}\,,$$

scomponendo a^8b^{12} in $a^7b^7 \times ab^5$, e prendendo la radice del fattore a^7b^7 (130).

Giova osservare inoltre che *quando l'esponente del radicale è divisibile per quello della potenza alla quale si eleva la quantità proposta, l'operazione si effettua dividendo il primo esponente pel secondo.* Per esempio,

$$\left(\sqrt[6]{a}\right)^2 = \sqrt[3]{a},$$

perchè $\frac{6}{2} = 3$.

In fatti $\sqrt[6]{a}$ rappresenta una quantità che è sei volte fattore in a, e la quantità $\sqrt[3]{a}$, che si ottiene dividendo l'esponente 6 per 2, non essendo che tre volte fattore in a, equivale per conseguenza al prodotto di due dei primi fattori; essa è dunque la seconda potenza di uno di questi fattori, ossia di $\sqrt[6]{a}$.

Lo stesso ragionamento si applicherebbe all'esempio scritto qui sotto, ed a tutti gli altri possibili:

$$\left(\sqrt[12]{a^2b}\right)^3 = \sqrt[4]{a^2b}.$$

167. Invertendo le regole dell'articolo precedente, si ottengono quelle che bisogna seguire nell'estrazione delle radici dalle quantità radicali.

Si vede subito, per la prima regola, che *se gli esponenti delle quantità sottomesse ai radicali sono divisibili per quello della radice che vuole estrarsi, l'operazione si eseguirà come se non vi fosse punto il radicale, ed al risultamento si apporrà il radicale primitivo.*

Si trova, per esempio, che

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6}} = \sqrt[5]{\sqrt[3]{a^6}} = \sqrt[5]{a^2},$$

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{\sqrt[4]{a^4b^8}} = \sqrt[3]{ab^2}.$$

Dalla seconda regola del numero precedente si conchiude che *l'estrazione della radice delle quantità radicali s'indica in generale, moltiplicando l'esponente del radicale per quello della radice che si vuole estrarre.*

Per quest'ultima regola si trova che

$$\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}.$$

Ed in vero $\sqrt[5]{a^4}$ è una quantità che è cinque volte fattore in a^4 (24, 129); ma la radice cubica di $\sqrt[5]{a^4}$, dovendo essere ancora tre volte fattore in quest'ultima quantità, si troverà 5×3 volte, ovvero 15 volte fattore nella prima a^4: dunque $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$. Si proverebbe allo stesso modo che $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^4}} = \sqrt[15]{a^4}$.

168. Poichè moltiplicando l'esponento della quantità sottoposta ad un radicale per un numero (166), s'innalza la radice indicata alla potenza espressa da questo numero; e moltiplicando similmente per lo stesso numero l'esponente del radicale (167), si estrae dal risultamento una radice di grado eguale a quello della potenza che si è formata, ne segue che questa seconda operazione riduce al suo primitivo stato la quantità proposta.

L'espressione $\sqrt[5]{a^3}$, per esempio, può trasformarsi in $\sqrt[35]{a^{21}}$, la quale espressione si ottiene moltiplicando per 7 gli esponenti 5 e 3; poichè moltiplicare per 7 l'esponente di a^3, è lo stesso che formare, col radicale $\sqrt[5]{a^{21}}$ per risultamento, la settima potenza del radicale proposto, e moltiplicare poi per 7 l'esponente 5 del radicale $\sqrt[5]{a^{21}}$, equivale a prendere la radice settima del risultamento, operazione che distrugge l'effetto della prima.

169. Con questa doppia operazione *si riducono allo stesso grado i radicali di gradi differenti, qualunque ne sia il numero, moltiplicando simultaneamente l'esponente di ciascun radicale e quelli delle quantità ad esso sottoposte pel prodotto degli esponenti di tutti gli altri radicali.* L'identità dei nuovi esponenti dei radicali è evidente per sè medesima, poichè essi sono formati dal prodotto di tutti gli esponenti dei radicali primitivi; ed in virtù di ciò che precede, ciascuna quantità radicale non ha punto cangiato di valore.

Si trasformano con questa regola i radicali

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \quad \text{e} \quad \sqrt[7]{c^4d^3}$$

in

$$\sqrt[35]{a^{21}b^{14}} \quad \text{e} \quad \sqrt[35]{c^{20}d^{15}}\ ;$$

similmente le tre quantità

$$\sqrt[3]{ab^2}, \quad \sqrt[5]{ac^3}, \quad \sqrt[7]{b^4c^3}$$

divengono respettivamente

$$\sqrt[105]{a^{35}b^{70}}\,,\qquad \sqrt[105]{a^{42}c^{63}}\,,\qquad \sqrt[105]{b^{60}c^{45}}\,.$$

Se sotto ai radicali si trovassero numeri, bisognerebbe elevarli alla potenza indicata dal prodotto degli esponenti degli altri radicali.

170. Parimente *si può portare sotto il radicale un fattore che ne è fuori, elevando questo fattore alla potenza indicata dall' esponente del radicale.*

Si cangerà, per esempio,

$$a^2 \quad \text{in} \quad \sqrt[5]{a^{10}}, \quad \text{e} \quad 2a\sqrt[3]{b} \quad \text{in} \quad \sqrt[3]{8a^3b}\,.$$

171. Dopo di aver ridotto allo stesso grado con la trasformazione precedente i radicali qualunque, vi si applicheranno senza difficoltà le regole date nei nri 164 e 165 per la moltiplicazione e per la divisione delle quantità radicali dello stesso grado.

Sia in generale

$$\sqrt[m]{a^pb^q} \times \sqrt[n]{b^rc^s}\,;$$

trasformo (169)

$$\sqrt[m]{a^pb^q}\,, \qquad \sqrt[n]{b^rc^s}$$

in

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}\,, \qquad \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}\,;$$

e la regola del nº 164 darà

$$\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}} \times \sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}} = \sqrt[nm]{a^{np}b^{nq+mr}c^{ms}}$$

pel prodotto dei radicali proposti.

Si ha pure pel n° 165.

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}}=\frac{\sqrt[mn]{a^{np}b^{nq}}}{\sqrt[mn]{b^{mr}c^{ms}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq}}{b^{mr}c^{ms}}}=\sqrt[mn]{\frac{a^{np}b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

Osservazioni sopra alcuni casi singolari del calcolo dei radicali.

172. Le regole alle quali è stato ridotto il calcolo dei radicali, si applicano senza difficoltà alle quantità reali; ma trattandosi di quantità immaginarie, queste regole indurrebbero in errore, se non venissero accompagnate da alcune osservazioni che riguardano le proprietà delle equazioni a due termini.

Per esempio, la regola del n° 164 dà immediatamente

$$\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}=\sqrt{-a\times -a}=\sqrt{a^2};$$

e se si prendesse $+a$ per $\sqrt{a^2}$, il risultamento sarebbe visibilmente falso, poichè il prodotto $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$, essendo il quadrato di $\sqrt{-a}$, dee ottenersi togliendo via il radicale, ed è per conseguenza eguale a $-a$.

Bézout ha benissimo spiegata questa difficoltà, osservando che quando s' ignora di qual maniera sia stato formato il quadrato a^2, e se ne domanda la radice, dee assegnarsi egualmente $+a$ e $-a$; ma che quando si sa anticipatamente quale di queste due quantità sia stata moltiplicata per sè stessa a fine di produrre a^2, non è più permesso, allorchè si ritorna sui propri passi, di prenderne un' altra. Questo caso è evidentemente quello dell' espressione $\sqrt{-a}\times\sqrt{-a}$: si sa allora che la quantità a^2, posta sotto il radicale $\sqrt{a^2}$, deriva da $-a$ moltiplicata per $-a$; cessa dunque l' ambiguità; e quando si ritorna alla radice, bisogna scrivere $-a$.

Lo stesso imbarazzo avrebbe pur luogo relativamente al prodotto $\sqrt{a}\times\sqrt{a}$, se non fossimo indotti dal non esservi

alcun segno — nell' espressione a prendere immediatamente il valore positivo di $\sqrt{a^2}$. Avrebbe dovuto altrimenti riflettersi che in questo caso a^2 venendo da $+a$ moltiplicata per $+a$, la sua radice dee necessariamente essere $+a$.

Questi ragionamenti non lasciano alcun dubbio sul caso particolare che si è considerato; ma ve n' ha altri che non possono spiegarsi chiaramente che mediante le proprietà delle equazioni a due termini.

173. Se, per esempio, si domandasse il prodotto $\sqrt[4]{a}\sqrt{-1}$, riducendo il secondo radicale al medesimo grado del primo (169), si avrebbe

$$\sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{a} \times \sqrt[4]{+1} = \sqrt[4]{a},$$

risultamento reale, benchè sia evidentissimo che la quantità reale $\sqrt[4]{a}$, moltiplicata per la quantità immaginaria $\sqrt{-1}$, debba dare un prodotto immaginario. Non bisogna credere intanto che l' espressione $\sqrt[4]{a}$ sia del tutto falsa, ma solamente che essa vien presa allora in un senso troppo particolare.

In fatti $\sqrt[4]{a}$, considerata algebricamente, essendo l' espressione dell'incognita x nell' equazione a due termini

$$x^4 - a = 0,$$

è suscettibile di quattro determinazioni differenti (159); poichè se si fa $a = \alpha^4$, rappresentando con α il valore numerico di $\sqrt[4]{a}$, astrazion fatta dal di lui segno, ovvero la determinazione aritmetica di questa quantità, si avranno i quattro valori

$$\alpha \times +1, \quad \alpha \times -1, \quad \alpha \times +\sqrt{-1}, \quad \alpha \times -\sqrt{-1},$$

dei quali il terzo è precisamente il prodotto proposto.

Con lieve riflessione facilmente si conoscerà la cagione dell' ambiguità testè osservata. Elevando a quadrato la quan-

tità -1, per trasformare il radicale del secondo grado in uno del quarto, si perviene a $+1$, che può nascere tanto da $+1\times+1$, quanto da -1×-1, la qual cosa introduce nella quantità $\sqrt[4]{1}$ le due nuove determinazioni $+1$ e -1, che non si trovavano affatto in $\sqrt{-1}$.

Lo stesso accade generalmente per effetto delle moltiplicazioni che si eseguono sotto i radicali (171); ed il prodotto $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b}$, dipende da un'equazione del grado mn, il che può ancora comprendersi osservando che $\sqrt[m]{a}$ e $\sqrt[n]{b}$ denotano i valori di x e di y nelle equazioni

$$x^m=a,\qquad y^n=b\qquad (159).$$

Così se si elevano i due membri della prima alla potenza n, e quelli della seconda alla potenza m, si avrà

$$x^{mn}=a^n,\qquad y^{mn}=b^m;$$

e moltiplicando queste nuove equazioni membro per membro, ne risulterà

$$x^{mn}y^{mn}=(xy)^{mn}=a^nb^m,\quad \text{e di qui}\quad xy=\sqrt[mn]{a^nb^m}.$$

Altronde si concepisce facilmente che il prodotto xy debba avere mn determinazioni, poichè per formarlo, può combinarsi successivamente ciascuna delle m determinazioni di x con ciascuna delle n determinazioni di y, il che dà mn risultamenti.

Quando trattasi di quantità reali, la scelta non è imbarazzante, perchè il numero delle determinazioni di questa specie non supera giammai due (157), e queste due determinazioni non differiscono che pel segno.

174. Facendo uso della trasformazione adoperata nel n° 159, si fa cadere tutta la difficoltà sulle radici di $+1$, o di -1; perciocchè se si pone $x=\alpha t$ ed $y=\beta u$, α e β

denotando le determinazioni numeriche di $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, senza aver riguardo al segno, le equazioni

$$x^m \mp a = 0\ ,\qquad y^n \mp b = 0\ ,$$

diventano

$$t^m \mp 1 = 0\ ,\qquad u^n \mp 1 = 0\ ,$$

e se ne ricava l' espressione

$$xy = \sqrt[m]{\pm a} \times \sqrt[n]{\pm b} = \alpha\beta\, tu = \alpha\beta \sqrt[m]{\pm 1} \times \sqrt[n]{\pm 1}\ ,$$

nella quale $\alpha\beta$ rappresenta il prodotto dei numeri $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[n]{b}$, ovvero la determinazione aritmetica della radice del grado mn del numero $a^n b^m$.

Quando si vorrà particolarizzare il prodotto dei radicali $\sqrt[m]{\pm a}$, $\sqrt[n]{\pm b}$ per una determinazione speciale di questi radicali, bisognerà trovare, mediante le equazioni

$$t^m \mp 1 = 0\ ,\qquad u^n \mp 1 = 0\ ,$$

le diverse espressioni di $\sqrt[m]{\pm 1}$, $\sqrt[n]{\pm 1}$, e combinarle convenevolmente (*).

Del resto queste operazioni non si presentano ordinariamente che per alcuni casi assai semplici, di cui i principali sono:

1.° $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}\,(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$;

(*) Quando l'esponente m è dispari, $\sqrt[m]{-1} = -\sqrt[m]{+1}$; ma quando è pari, ciò non ha luogo. Allorchè, per esempio, $m = 4$, si trova che

$$y^4 + 1 = (y^2 + y\sqrt{2} + 1)(y^2 - y\sqrt{2} + 1);$$

ed eguagliando a zero ciascuno di questi fattori, si ottengono le quattro espressioni di $\sqrt[4]{-1}$. (Si vegga il *Complemento.*)

tolgo il segno radicale in $\sqrt{-1}$, ed ottengo

$$\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = \sqrt{ab} \times -1 = -\sqrt{ab}:$$

2.° $$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times (\sqrt[4]{-1})^2;$$

non moltiplico qui -1 per -1, perchè cadrei sull'ambiguità notata nel n° 173; ma osservo che il quadrato della radice quarta di una grandezza non è altra cosa che la di lei radice quadrata, e così risulta

$$\sqrt[4]{-a} \times \sqrt[4]{-b} = \sqrt[4]{ab} \times \sqrt{-1}:$$

3.° $$\sqrt[6]{-a} \times \sqrt[6]{-b} = \sqrt[6]{ab} \times (\sqrt[6]{-1})^2 = \sqrt[6]{ab} \times \sqrt[3]{-1}$$

$$= \sqrt[6]{ab} \times -1 = -\sqrt[6]{ab}.$$

Si troverebbero in tal modo risultamenti alternativamente reali ed immaginari.

Del calcolo degli esponenti frazionari.

175. Allorchè ai segni radicali si sostituiscono gli esponenti frazionari corrispondenti (132), l'applicazione immediata delle regole degli esponenti dà i medesimi risultamenti che si ottengono coi metodi usati nel calcolo dei radicali.

In fatti, trasformando, per esempio,

$$\sqrt[5]{a^3b^2}, \qquad \sqrt[5]{a^3c^2}$$

in

$$a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}, \qquad a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}},$$

si avrà

$$\sqrt[5]{a^3b^2} \times \sqrt[5]{a^3c^2} = a^{\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}} \times a^{\frac{3}{5}}c^{\frac{2}{5}} =$$

$$a^{\frac{3}{5}+\frac{3}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}} = a^{\frac{6}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}};$$

osservando poi che $\frac{6}{5}=1+\frac{1}{5}$, che in conseguenza

$$a^{\frac{6}{5}}=a^{1+\frac{1}{5}}=a\times a^{\frac{1}{5}} \quad (25),$$

e che $a^{\frac{1}{5}}b^{\frac{2}{5}}c^{\frac{2}{5}}$ equivale a $\sqrt[5]{ab^2c^2}$, verrà

$$\sqrt[5]{a^3b^2}\times\sqrt[5]{a^3c^2}=a\sqrt[5]{ab^2c^2},$$

risultamento non solo esatto, ma anche ridotto alla sua più semplice espressione.

Sia l' esempio generale $\sqrt[m]{a^pb^q}\times\sqrt[n]{b^rc^s}$; i radicali proposti si trasformeranno in

$$a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}, \quad b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}},$$

e verrà, per la regola degli esponenti (25),

$$a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}}\times b^{\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}=a^{\frac{p}{m}}b^{\frac{q}{m}+\frac{r}{n}}c^{\frac{s}{n}}.$$

Se ora si vuole eseguire l'addizione delle frazioni $\frac{q}{m}$, $\frac{r}{n}$, bisogna ridurle allo stesso denominatore; ed a fine di dare uniformità ai risultamenti, bisogna fare altrettanto sulle frazioni $\frac{p}{m}$, $\frac{s}{n}$: si otterrà con questo mezzo

$$a^{\frac{np}{mn}}b^{\frac{nq+mr}{mn}}c^{\frac{ms}{mn}};$$

e passando ai radicali, si ha, come nel n° 171,

$$\sqrt[m]{a^p b^q} \times \sqrt[n]{b^r c^s} = \sqrt[mn]{a^{np} b^{nq+mr} c^{ms}}.$$

176. La divisione si esegue colla stessa facilità: si ha, per esempio,

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \frac{a^{\frac{3}{5}} b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}} c^{\frac{1}{5}}} = \frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{4}{5}-\frac{3}{5}} c^{\frac{1}{5}}} \quad (38),$$

il che si riduce a

$$\frac{b^{\frac{2}{5}}}{a^{\frac{1}{5}} c^{\frac{1}{5}}};$$

e passando ai radicali, si ottiene

$$\frac{\sqrt[5]{a^3b^2}}{\sqrt[5]{a^4c}} = \sqrt[5]{\frac{b^2}{ac}}.$$

Si ha in generale

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}}}{b^{\frac{r}{n}} c^{\frac{s}{n}}} = \frac{a^{\frac{p}{m}} b^{\frac{q}{m}-\frac{r}{n}}}{c^{\frac{s}{n}}};$$

e riducendo allo stesso denominatore gli esponenti frazionari,

per eseguire la sottrazione indicata, si troverà

$$\frac{\sqrt[m]{a^p b^q}}{\sqrt[n]{b^r c^s}} = \frac{a^{\frac{np}{mn}} b^{\frac{nq-mr}{mn}}}{c^{\frac{ms}{mn}}} = \sqrt[mn]{\frac{a^{np} b^{nq-mr}}{c^{ms}}}.$$

È facile vedere che la riduzione degli esponenti frazionarî allo stesso denominatore fa qui le veci della riduzione dei radicali allo stesso esponente, e conduce precisamente agli stessi risultamenti (171).

177. È pure evidentissimo per la regola del n° 127, che

$$\left(\sqrt[m]{a^p}\right)^n = \left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}},$$

e per quella del n° 129, che

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a^p}} = \sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}.$$

Il calcolo degli esponenti frazionarî è uno degli esempi i più notabili dell' utilità dei segni, quando questi sono scelti a proposito. L'analogia che regna tra gli esponenti frazionarî e gli esponenti interi, rende le regole che bisogna seguire nel calcolo di questi ultimi, applicabili a quello degli altri, mentre ci han voluto ragionamenti particolari per iscoprire le regole del calcolo dei radicali, perchè il segno $\sqrt{\ }$, che li esprime, non ha alcun legame con le operazioni che li generano. Quanto più si progredisce nell' Algebra, tanto più si conoscono i numerosi vantaggi prodotti in questa scienza dalla notazione degli esponenti, immaginata da Descartes.

Teoria generale delle equazioni.

178. Le equazioni del primo e del secondo grado, a parlar propriamente, sono le sole di cui si abbia una risoluzione completa; delle equazioni di grado qualunque però sono state scoperte proprietà generali, che non solamente porgono i mezzi per risolverle quando esse equazioni sono numeriche, ma offrono altresì numerose conseguenze per le parti più elevate dell'Algebra. Queste proprietà sono relative ad una forma particolare sotto la quale ogni equazione può essere posta.

Un'equazione di qualunque grado nella massima sua generalità dee contenere tutte le potenze dell'incognita, da quella del suo grado fino alla prima inclusivamente, moltiplicate, ciascuna, per quantità cognite, ed in oltre un termine del tutto noto.

L'equazione generale del quinto grado, per esempio, conterrà tutte le potenze dell'incognita dalla quinta fino alla prima inclusivamente; e se vi sono più termini affetti dalla medesima potenza dell'incognita, bisognerà concepirli riuniti in un solo, come si è fatto per le equazioni del secondo grado nel n° 108. Di poi si passeranno, come si è praticato nell'anzidetto numero, tutti i termini dell'equazione in un solo membro; l'altro sarà necessariamente uguale a zero; e si renderà positivo il primo termine, cangiando, se bisogna, tutti i segni dell'equazione.

Si avrà con questo mezzo un' espressione della forma seguente:

$$nx^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t = 0,$$

nella quale giova osservare che le lettere n, p, q, r, s, t possono rappresentare indifferentemente tanto numeri negativi quanto numeri positivi; poi dividendo tutti i termini per n, a fine di non lasciare al primo termine che l'unità per coefficiente, e facendo

$$\frac{p}{n} = P, \quad \frac{q}{n} = Q, \quad \frac{r}{n} = R, \quad \frac{s}{n} = S, \quad \frac{t}{n} = T,$$

verrà

$$x^5 + Px^4 + Qx^3 + Rx^2 + Sx + T = 0.$$

Da ora innanzi supporrò che le equazioni siano state sempre preparate come si è fatto qui sopra, e rappresenterò l'equazione generale di un grado qualunque con

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,. + Tx + U = 0.$$

L'intervallo indicato dai punti sarà riempito, allorchè si assegnerà all'esponente n un valore particolare.

Ogni quantità o qualunque espressione, sia reale, sia immaginaria, la quale, sostituita in luogo dell'incognita x in una equazione *ordinata*, cioè preparata come qui sopra, ne rende il primo membro eguale a zero, e per conseguenza soddisfa alla quistione, si chiama la *radice dell'equazione proposta*; ma come qui non si tratta di potenze, questo significato è più generale di quello che sino al presente si è attribuito alla parola *radice* (90, 129).

179. Ecco una proposizione analoga a quelle dimostrate nei numeri 116 e 159, e che dee riguardarsi come fondamentale.

La radice di una equazione qualunque

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,.\,. + Tx + U = 0,$$

essendo rappresentata da a, *il primo membro di questa equazione sarà divisibile esattamente pel binomio* $x - a$.

In fatti, poichè a è un valore di x, si ha necessariamente

$$a^n + Pa^{n-1} + Qa^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,.\,. + Ta + U = 0,$$

e per conseguenza

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,.\,. - Ta;$$

per modo che l'equazione proposta è identicamente la stessa che

$$\left.\begin{array}{l} x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. + Tx \\ -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,. - Ta \end{array}\right\} = 0,$$

e riducesi ad

$$\left.\begin{array}{l} x^n - a^n + P(x^{n-1} - a^{n-1}) + Q(x^{n-2} - a^{n-2}) \\ \,. + T(x-a) \end{array}\right\} = 0.$$

Le quantità

$$x^n - a^n \,,\; x^{n-1} - a^{n-1} \,,\; x^{n-2} - a^{n-2} \;\ldots\ldots\; x - a$$

essendo tutte divisibili per $x - a$ (158), è evidente che il primo membro dell'equazione proposta avrà tutti i suoi termini divisibili per questa quantità, e sarà per conseguenza divisibile per $x - a$, come lo porta l'enunciato della proposizione (*).

180. Per formare il quoziente, altro non dee farsi che sostituire in luogo delle quantità

$$x^n - a^n \,,\; x^{n-1} - a^{n-1} \,,\; x^{n-2} - a^{n-2} \;\ldots\ldots\; x - a$$

i quozienti che danno, quando vengono divise per $x - a$, i quali sono rispettivamente

$$x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1},$$
$$x^{n-2} + ax^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-2},$$
$$x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-3},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ 1.$$

(*) D'Alembert prova la stessa proposizione nel modo seguente. Se si concepisca che il primo membro dell'equazione proposta sia diviso per $x - a$, e che l'operazione sia spinta fino a che siano esauriti i termini affetti da x, il resto, se ve ne sarà uno, non potrà contenere x. Rappresentandolo con R, e chiamando Q il quoziente qualunque al quale si sarà pervenuto, si avrà necessariamente

$$x^n + Px^{n-1} \ldots\ldots + \text{ec.} = Q(x - a) + R.$$

Ora, quando in luogo di x si sostituisce a, il primo membro si annienta, poichè a è il valore di x; il termine $Q(x - a)$ svanisce pure, a cagione del fattore $x - a$ che diventa zero: si deve dunque avere $R = 0$, e ciò indipendentemente dalla sostituzione; perchè questo resto non contenendo x, non può effettuarvisi la sostituzione, ed anche dopo la sostituzione conserva il valore che aveva prima.

Segue da ciò, che in tutti i casi è $R = 0$, e che per conseguenza $x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \text{ec.}$ è divisibile esattamente per $x - a$.

Ordinando il risultamento secondo le potenze di x, si troverà

$$\begin{array}{l} x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} \ldots\ldots + a^{n-1} \\ \quad + Px^{n-2} + Pax^{n-3} \ldots\ldots + Pa^{n-2} \\ \quad\quad + Qx^{n-3} \ldots\ldots + Qa^{n-3} \\ \quad\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad\quad\quad\quad + T. \end{array}$$

181. Egli è chiaro, mediante le sole regole della divisione, che il primo membro dell'equazione

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} + \text{ec.} = 0$$

essendo diviso per $x-a$, darà un quoziente della forma

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + Q'x^{n-3} + \text{ec.},$$

P', Q', ec. denotando quantità cognite differenti da P, Q, ec.; si avrà dunque

$$x^n + Px^{n-1} + \text{ec.} = (x-a)(x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{ec.});$$

e giusta l'osservazione del numero 116, l'equazione proposta si verificherà di due maniere, cioè, facendo

$$x-a=0, \quad \text{o} \quad x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{ec.} = 0.$$

Se ora l'equazione

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{ec.} = 0$$

ha una radice b, il suo primo membro sarà divisibile per $x-b$; si avrà ancora

$$x^{n-1} + P'x^{n-2} + \text{ec.} = (x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{ec.}),$$

e per conseguenza

$$x^n + Px^{n-1} + \text{ec.} = (x-a)(x-b)(x^{n-2} + P''x^{n-3} + \text{ec.}):$$

l'equazione proposta potrà dunque verificarsi di tre maniere,

cioè, facendo

$$x-a=0, \quad \text{o} \quad x-b=0, \quad \text{o} \quad x^{n-2}+P''x^{n-3}+\text{ec.}=0.$$

Se l'ultima di queste equazioni ha una radice c, il suo primo membro si scomporrà pure in due fattori,

$$x-c, \qquad x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.},$$

e si avrà

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}$$

$$=(x-a)(x-b)(x-c)(x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.});$$

dal che si scorge che l'equazione proposta potrà verificarsi di quattro maniere, cioè, facendo

$$x-a=0,\ x-b=0,\ x-c=0,\ x^{n-3}+P'''x^{n-4}+\text{ec.}=0.$$

Continuando a ragionare così, si otterranno successivamente fattori di gradi

$$n-4, \quad n-5, \quad n-6, \quad \text{ec.};$$

e se ciascuno di questi fattori, eguagliato a zero, è suscettibile di una radice, il primo membro dell'equazione proposta sarà ridotto alla forma

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \ldots\ldots\ (x-l),$$

vale a dire, sarà risoluto in tanti fattori di primo grado, quante sono le unità dell'esponente n del suo grado. L'equazione

$$x^n+Px^{n-1}+\text{ec.}=0,$$

potrà dunque verificarsi in n maniere, cioè, facendo $x-a=0$, oppure $x-b=0$, oppure $x-c=0$, oppure $x-d=0$, o finalmente $x-l=0$.

Bisogna bene osservare che queste equazioni non debbono essere riguardate come vere che alternativamente, e che si ca-

drebbe in manifeste contraddizioni, se si supponesse che le medesime avessero luogo nello stesso tempo. In fatti da $x-a=0$ si trae $x=a$, mentre $x-b=0$ conduce ad $x=b$, conseguenze che non possono accordarsi quando a e b sono quantità disuguali.

182. Il primo membro dell' equazione proposta

$$x^n + Px^{n-1} + \text{ec.} = 0$$

essendo risoluto in n fattori di primo grado

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad x-d,\ \ldots\ x-l,$$

non potrebbe essere divisibile per alcun' altra espressione di questo grado. Imperciocchè, se la divisione per un binomio $x-\alpha$, differente dai primi, fosse possibile, si avrebbe

$$x^n + Px^{n-1} + \text{ec.} = (x-\alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{ec.}),$$

e per conseguenza

$$(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ \ldots\ldots\ (x-l)$$
$$= (x-\alpha)(x^{n-1} + px^{n-2} + \text{ec.});$$

ora, cangiando x in α, si ottiene

$$(\alpha-a)(\alpha-b)(\alpha-c)(\alpha-d)\ \ldots\ldots\ (\alpha-l)$$
$$= (\alpha-\alpha)(\alpha^{n-1} + p\alpha^{n-2} + \text{ec.});$$

il secondo membro svanisce a cagione del fattore nullo $\alpha-\alpha$; ma non accade lo stesso del primo, che è il prodotto di fattori tutti differenti da zero, finchè α differisce da ciascuna delle radici $a, b, c, d, \ldots\ l$; la supposizione non è dunque vera; laonde *una equazione d' un grado qualunque non può ammettere più divisori binomi di primo grado di quel che vi siano unità nell' esponente del suo grado, e non può avere per conseguenza un maggior numero di radici* (*).

(*) Questa dimostrazione, molto più semplice di quella che io aveva data nelle edizioni precedenti, è tratta dagli *Annali di Matematiche* pubblicati dal Sig. Gergonne. (Vedete il T. IV, pagina 209—210, nota.)

Cade qui a proposito l' osservare che il binomio $x-\alpha$ non può dividere il prodotto dei binomi $x-a$, $x-b$, ec., perchè è *primo* con i fattori $x-a$, $x-b$, ec. di questo prodotto; proposizione che si estende a tutti i polinomi della forma $x^m + Px^{m-1} + \text{ec.}$ Sostituendo questi polinomi ai numeri nei ragionamenti del n° 97, si dimostrerà facilmente che *ogni polinomio che divide il prodotto di due polinomi A e B, e che è primo con uno di questi polinomi, divide necessariamente l' altro.*

183. Riguardando una equazione come il prodotto di un numero di fattori

$$x-a,\quad x-b,\quad x-c,\quad x-d,\ \text{ec.}$$

eguale all'esponente del di lei grado, essa prenderà la forma del prodotto indicato nel n° 135, con questa modificazione, che i termini saranno alternativamente positivi e negativi.

Limitandosi, per esempio, a quattro fattori, si avrà

$$\begin{array}{llll} x^4 - ax^3 & + abx^2 & - abcx & + abcd = 0. \\ - bx^3 & + acx^2 & - abdx & \\ - cx^3 & + adx^2 & - acdx & \\ - dx^3 & + bcx^2 & - bcdx & \\ & + bdx^2 & & \\ & + cdx^2 & & \end{array}$$

I secondi termini dei binomi $x-a$, $x-b$, $x-c$, ec. essendo le radici dell'equazione, prese con un segno contrario, le proprietà osservate nel n° 135, e dimostrate in generale nel n° **136**, avranno luogo pel caso attuale nella maniera seguente:

Il coefficiente del secondo termine, preso col segno contrario, sarà la somma delle radici;

Il coefficiente del terzo termine sarà la somma dei prodotti delle radici moltiplicate a due a due;

Il coefficiente del quarto termine, preso col segno contrario, sarà la somma dei prodotti delle radici moltiplicate a tre a tre, e così di seguito, osservando di cangiare il segno dei coefficienti dei termini di posto pari;

L'ultimo termine, sottomesso come gli altri a questa legge, *sarà il prodotto di tutte le radici.*

Eguagliando, per esempio, a zero il prodotto dei tre fattori

$$x-5,\qquad x+4,\qquad x+3,$$

si formerà l'equazione

$$x^3+2x^2-23x-60=0,$$

di cui le radici saranno

$$+5,\qquad -4,\qquad -3:$$

si avrà per la loro somma

$$5 - 4 - 3 = -2\,;$$

per quella dei loro prodotti a due a due

$$+5 \times -4 + 5 \times -3 - 4 \times -3 = -20 - 15 + 12 = -23,$$

e pel prodotto delle tre radici

$$+5 \times -4 \times -3 = 60.$$

Questo appunto si dedurrebbe dai coefficienti $2, -23$, -60, cangiando i segni di quelli del secondo e del quarto termine.

Se si eguaglia a zero il prodotto dei fattori

$$x - 2, \quad x - 3 \quad \text{ed} \quad x + 5,$$

l' equazione risultante

$$x^3 - 19x + 30 = 0\,,$$

non avendo termine affetto da x^2, potenza immediatamente inferiore a quella del primo termine, *manca di secondo termine*, e ciò perchè la somma delle radici, che presa con un segno contrario forma il coefficiente di questo termine, è in questo caso

$$2 + 3 - 5\,,$$

ossia zero, ovvero, in altri termini, perchè la somma delle radici positive è uguale a quella delle negative (*).

(*) Si potrebbe credere che per iscoprire le radici di una equazione qualunque del quarto grado

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0\,,$$

bastasse paragonarla col prodotto del n° 183, osservando di eguagliare le quantità che moltiplicano nell'uno e nell'altra le stesse potenze di x; ed appunto per questo la maggior parte degli autori elementari pensano di dimostrare che *un'equazione di un grado qualunque è il prodotto di altrettanti fattori semplici*, *quante sono le unità dell'esponente del suo grado:* si vedrà da ciò che segue che il loro ragionamento è falso. Io non ho conchiuso questa proposizione che condizionatamente nel n° 182, giacchè bisognerebbe, per affermarla positivamente, dimostrare che un'equazione di un grado qualunque ha

184. Quando si considera una equazione come formata dal prodotto di più fattori semplici, ossia di primo grado, si

una radice, sia reale, sia immaginaria, la qual cosa non sembra facile a farsi negli elementi, e fortunatamente non è allora necessaria: del resto si possono vedere nel *Complemento* le riflessioni che ho fatte intorno a questo soggetto.

Formando le equazioni

$$-a-b-c-d=p,$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=q,$$
$$-abc-abd-acd-bcd=r,$$
$$abcd=s,$$

per cavarne i valori delle lettere a, b, c, d, che sarebbero le radici dell'equazione proposta, il calcolo riuscirebbe complicatissimo, se si volesse tenere l'andamento del numero 78 nella determinazione delle incognite a, b, c, d; ma se si moltiplica la prima delle equazioni scritte qui sopra per a^3, la seconda per a^2, la terza per a, e si sommano questi tre prodotti con la quarta, membro a membro, si avrà

$$-a^4=pa^3+qa^2+ra+s,$$

dalla quale equazione con una semplice trasposizione si conchiude

$$a^4+pa^3+qa^2+ra+s=0.$$

Questa equazione contiene a solamente senza altra ignota, ma essa è interamente simile alla proposta: la difficoltà di ottenere a è dunque la stessa che quella di ottenere x.

Così, siccome l' ha detto Castillon (*Mem. di Berlino*, anno 1789):
« Si prova bene in tutte le Algebre, che col prodotto di parecchi
» binomi semplici si forma un'equazione di quel grado che si vuole,
» ma non si è dimostrato che un'equazione formata con la moltipli-
» cazione di più binomi semplici, può avere quei coefficienti che si
» vogliono. »

Se invece di moltiplicare le tre prime equazioni in a, b, c, d per a^3, a^2 ed a respettivamente, si moltiplicassero per b^3, b^2 e b, o per c^3, c^2 e c, o per d^3, d^2 e d, e si sommassero pure i prodotti colla quarta, si avrebbe nel primo caso

$$-b^3=pb^3+qb^2+rb+s,$$

nel secondo,

$$-c^4=pc^3+qc^2+rc+s,$$

nel terzo,

$$-d^4=pd^3+qd^2+rd+s;$$

da ciò segue che, tanto per avere a, quanto per avere b, ec. si ricade sulla stessa equazione. In fatti le quantità a, b, c, d, essendo tutte disposte della stessa maniera in ciascuna equazione, non v'è ragione sufficiente perchè l'una sia determinata da certe operazioni differenti da quelle che determinano l'altra; ed in generale, se, nella ricerca di più quantità ignote, si è nell'obbligo d'impiegare per ciascuna gli stessi ragionamenti, le stesse operazioni e le stesse quantità cognite, tutte queste quantità saranno necessariamente radici d'una stessa equazione.

prova (182) che non ne può avere che un numero indicato dall' esponente n del di lei grado; ma se si combinano questi fattori a duo a due, si formeranno quantità di secondo grado, che saranno anche fattori dell' equazione proposta, il numero dei quali sarà espresso da

$$\frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \quad (140).$$

Per esempio, il primo membro dell' equazione

$$\begin{array}{l} x^4 - ax^3 + abx^2 - abcx + abcd = 0 \\ \quad - bx^3 + acx^2 - abdx \\ \quad - cx^3 + adx^2 - acdx \\ \quad - dx^3 + bcx^2 - bcdx \\ \qquad\quad + bdx^2 \\ \qquad\quad + cdx^2 \end{array}$$

essendo il prodotto di

$$(x-a) \times (x-b) \times (x-c) \times (x-d),$$

può scomporsi in fattori di secondo grado nelle sei seguenti maniere:

$$\begin{array}{l} (x-a)(x-b) \times (x-c)(x-d) \\ (x-a)(x-c) \times (x-b)(x-d) \\ (x-a)(x-d) \times (x-b)(x-c) \\ (x-b)(x-c) \times (x-a)(x-d) \\ (x-b)(x-d) \times (x-a)(x-c) \\ (x-c)(x-d) \times (x-a)(x-b); \end{array}$$

e ne risulta che un' equazione di quarto grado può avere sei divisori di secondo grado.

Combinando i fattori semplici a tre a tre, si formeranno i divisori di terzo grado della proposta; per un' equazione del grado n, il numero ne sarà

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

e così di seguito.

Dell' eliminazione tra le equazioni dei gradi superiori al primo.

185. La regola del n° 78, o il metodo del n° 84, basta sempre per eliminare tra due equazioni un' incognita che non superi in esse il primo grado, qualunque sia del resto quello delle altre incognite; e quando anche l' incognita non fosse al primo grado che in una sola delle equazioni proposte, pur tuttavia la regola del n° 78 vi si applicherebbe ancora.

Se si hanno, per esempio, le equazioni

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + xy = n^2,$$

si prenderà nella seconda il valore di y, che sarà

$$y = \frac{n^2 - x^2}{x};$$

sostituendo questo valore ed il suo quadrato in luogo di y e di y^2 nella prima equazione, si otterrà un risultamento in x solamente.

186. Se le equazioni proposte fossero ambedue del secondo grado rispetto all' una ed all' altra incognita, non si potrebbe applicare il metodo precedente che risolvendo una delle equazioni o per rapporto ad x, o per rapporto ad y.

Siano, per esempio, le equazioni

$$ax^2 + bxy + cy^2 = m^2,$$
$$x^2 + y^2 = n^2;$$

la seconda dà

$$y = \pm\sqrt{n^2 - x^2};$$

sostituendo nella prima questo valore di y ed il di lui quadrato, si otterrà

$$ax^2 \pm bx\sqrt{n^2 - x^2} + c(n^2 - x^2) = m^2.$$

Sembra che l' oggetto proposto sia stato adempiuto, poichè questo risultamento non contiene più l' incognita y; ma non si può risolvere l'equazione in x senza ridurla prima ad una forma razionale, facendo da essa sparire il radicale sotto di cui trovasi inviluppata l' incognita.

È facile vedere che se il radicale fosse solo in un membro, si farebbe sparire elevando a quadrato cotesto membro; riunendo dunque, con la trasposizione dei termini $\pm bx\sqrt{n^2-x^2}$ ed m^2, tutti i termini razionali in un solo membro, si avrà

$$ax^2 + c(n^2 - x^2) - m^2 = \mp bx\sqrt{n^2 - x^2},$$

e prendendo il quadrato di ciascun membro, si formerà l'equazione

$$\left.\begin{array}{l} a^2x^4 + c^2(n^2 - x^2)^2 + m^4 \\ + 2acx^2(n^2 - x^2) - 2am^2x^2 - 2cm^2(n^2 - x^2) \end{array}\right\} = b^2x^2(n^2 - x^2),$$

che più non contiene radicali.

L'andamento ora tenuto per eliminare il radicale, deve essere notato, perchè si ha spesso occasione di farne uso; esso consiste nell'*isolare il radicale che si vuole eliminare*, *ed in seguito nell'elevare i due membri dell'equazione alla potenza denotata dal grado di questo radicale.*

187. La complicazione di questo procedimento, che diviene grandissima quando vi sono più radicali, unita alla difficoltà di risolvere l'una delle equazioni proposte per rapporto ad una delle incognite, difficoltà che è sovente insormontabile nello stato attuale dell'Algebra, ha fatto cercare un metodo per mezzo del quale si potesse senza questo eseguire l'eliminazione; di maniera che la risoluzione delle equazioni fosse l'ultima delle operazioni necessarie alla risoluzione dei problemi.

Per rendere i calcoli più facili, si mettono le equazioni a due incognite sotto la forma di equazioni ad una sola incognita, non lasciando in mostra che quella incognita che si vuole eliminare. Se si avesse, per esempio,

$$x^2 + axy + bx = cy^2 + dy + e,$$

si trasporterebbero tutti i termini in un solo membro, ordinandoli rapporto ad x; e verrebbe

$$x^2 + (ay + b)\, x - c^2y - dy - e = 0,$$

e facendo per abbreviare,

$$ay + b = P, \; -c^2y - dy - e = Q,$$

si avrebbe

$$x^2 + Px + Q = 0.$$

L'equazione generale del grado m a due incognite deve contenere tutte le potenze di x e di y, che non sorpassano questo grado, come pure i prodotti nei quali la somma degli esponenti di x e di y non si eleva al di sopra di m; adunque l'equazione generale del grado m a due incognite può rappresentarsi nel modo seguente:

$$x^m+(a+by)x^{m-1}+(c+dy+ey^2)x^{m-2}+(f+gy+hy^2+ky^3)x^{m-3}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$+(p+qy+ry^2\ldots+uy^{m-1})x+p'+q'y+r'y^2\ldots+v'y^m=0.$$

In questa equazione non si dà alcun coefficiente diverso dall'unità ad x^m, perchè si può sempre, mediante la divisione, liberare dal suo moltiplicatoro quel termine che si vuole in una equazione; e se si fa

$$a+by=P,\ c+dy+ey^2=Q,\ f+gy+hy^2+ky^3=R,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$p+qy\ldots\ldots+uy^{m-1}=T,\ p'+q'y\ldots\ldots+v'y^m=U,$$

l'equazione di sopra prenderà la forma

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ \ldots\ldots+Tx+U=0.$$

188. È cosa utile il notare che l'eliminazione di x tra due equazioni di secondo grado

$$x^2+Px+Q=0,\qquad x^2+P'x+Q'=0$$

può eseguirsi immediatamente togliendo dalla prima la seconda equazione. Questa operazione dà

$$(P-P')x+Q-Q'=0,$$

e quindi
$$x=-\frac{Q-Q'}{P-P'};$$

sostituendo questo valore in una delle due equazioni proposte per esempio, nella prima, si troverà

$$\frac{(Q-Q')^2}{(P-P')^2}-\frac{P(Q-Q')}{P-P'}+Q=0;$$

facendo sparire i denominatori, si avrà

$$(Q-Q')^2-P(P-P')(Q-Q')+Q(P-P')^2=0;$$

e mettendo $P-P'$ per fattore comune nei due ultimi termini, verrà

$$(Q-Q')^2+(P-P')(PQ'-QP')=0.$$

Non rimarrà niente più da fare, salvo che sostituire in luogo di P, Q, P' e Q' i valori particolari al caso che si esamina.

189. Prima di passare più avanti, dimostrerò in qual maniera si riconosca che il valore di una qualunque delle incognite soddisfaccia nel medesimo tempo alle due equazioni proposte. A fine di fissare meglio le idee, prenderò un esempio particolare; ma non per questo il ragionamento sarà meno generale.

Siano le equazioni

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0 \ldots\ldots (1),$$
$$x^2+4xy\ -2y^2\ -10=0 \ldots\ldots (2),$$

che supporrò date da una quistione in conseguenza della quale si dee avere $y=3$.

Per verificare quest'ultima asserzione, bisogna dapprima sostituire 3 in luogo di y nelle equazioni proposte, il che dà

$$x^3+9x^2+27x-98=0 \ldots\ldots (a),$$
$$x^2+12x-28=0 \ldots\ldots (b),$$

equazioni che debbono ammettere il medesimo valore di x, se quello che si è assegnato ad y, è vero. Se si dinota con α il valore di x, bisognerà, in virtù di ciò che è stato dimostrato nel numero 179, che l'equazione (a) e l'equazione (b) siano divisibili entrambe per $x-\alpha$; esse avranno dunque un divisore comune di cui $x-\alpha$ dee far parte; ed in fatti si trova $x-2$ per questo comun divisore (48): si ha dunque $\alpha=2$. Così il valore $y=3$ conviene alla quistione, e corrisponde ad $x=2$.

Se restasse qualche dubbio che il comun divisore delle equazioni (a) e (b) dovesse dare il valore di x, si toglierebbe

osservando che queste equazioni riduconsi ad

$$(x^2+11x+49)(x-2)=0\,,$$
$$(x+14)(x-2)=0\,,$$

dove si scorge che esse sono soddisfatte allorchè vi si mette 2 in luogo di x.

190. Il mezzo da me ora indicato per trovare il valore di x quando quello di y è noto, può applicarsi immediatamente all'eliminazione di x.

In fatti quando si opera sulle equazioni (1) e (2), come se si volesse trovare il loro comun divisore in x, in vece di pervenire a questo divisore, si giunge ad un resto che non contiene altro che l'incognita y e numeri dati; ed è evidente che se vi si ponesse in luogo di y il suo valore 3, esso resto dovrebbe annullarsi, poichè, mediante la stessa sostituzione, le equazioni (1) e (2) diventano le equazioni (a) e (b), le quali hanno un comun divisore. Eguagliando dunque questo resto a zero, verrà ad esprimersi la condizione alla quale i valori di y debbono soddisfare, perchè le due date equazioni potessero ammettere nello stesso tempo un medesimo valore per x.

Il quadro qui annesso contiene le particolarità dell'operazione relativa alle equazioni

$$x^3+3x^2y+3xy^2-98=0\,,$$
$$x^2+4xy-2y^2-10=0\,,$$

delle quali mi sono occupato nel numero precedente: si trova per l'ultimo divisore

$$(9y^2+10)x-2y^3-10y-98\,;$$

ed il resto essendo eguagliato a zero, dà

$$43y^6+345y^4-1960y^3+750y^2-2940y-4302=0\,,$$

equazione che ammette non solamente il valore di $y=3$ indicato qui sopra, ma ancora tutti gli altri valori di y di cui la quistione proposta è suscettibile, e per questa ragione tale equazione prende il nome di *equazione finale*.

Il resto soprascritto essendo annullato, il penultimo resto diventa il divisore comune delle equazioni proposte, di maniera che eguagliandolo a zero, darà il valore di x, allorchè vi si

pone quello di y. Sapendo, per esempio, che $y = 3$, si metterà questo numero nella quantità

$$(9y^2 + 10)\,x - 2y^3 - 10y - 98,$$

che si eguaglierà in seguito a zero, e verrà l'equazione di primo grado

$$91x - 182 = 0, \qquad \text{da cui si trae} \qquad x = 2.$$

191. L'operazione che ho eseguita sopra equazioni particolari, può applicarsi egualmente ad equazioni qualunque

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + Rx^{m-3} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + R'x^{n-3} \ldots\ldots + T'x + U' = 0,$$

ove la seconda incognita è involta nei coefficienti P, Q, ec., P', Q', ec.: l'eliminazione dell'incognita x si effettuerà cercando, come di sopra, il massimo divisore comune ai primi membri di queste equazioni, ed uguagliando a zero il resto indipendente da x.

Il calcolo, in generale assai complicato, può ricevere nei casi particolari parecchie utili semplicizzazioni; ma mi dilungherei di molto entrando nelle particolarità delle medesime; e d'altronde sono esse assai facili a trovarsi: supporrò dunque che nel corso dell'operazione non si tolga via alcun fattore in y che fosse comune a tutti i termini d'un medesimo resto, e mi limiterò a spiegare i risultamenti che potrebbero recare imbarazzo. Primieramente potrebbe avvenire che il valore di y rendesso nullo da sè il penultimo resto; allora il resto precedente, ovvero quello nel quale x trovasi al secondo grado, diverrà il divisore comune delle due equazioni proposte. Ponendovi il valore di y, ed eguagliandolo in seguito a zero, si avrà un'equazione di secondo grado in x solamente, di cui i due valori corrisponderanno al valore cognito di y. Se questo valore rendesse ancora nullo il resto di secondo grado, bisognerebbe ricorrere al precedente, ove x monterebbe al terzo grado, perchè desso sarebbe in questo caso il divisore comune delle due equazioni proposte; ed il valoro di y corrisponderebbe a tre valori di x. In generale bisognerà risalire sino al resto che non si annulla con la sostituzione del valore di y.

Può anche accadere che non si trovi alcun resto, oppure che il resto non racchiuda che quantità note.

Nel primo caso le due equazioni hanno un divisore comune senza alcuna determinazione di y; esse sono dunque della forma

$$P \times D = 0, \qquad Q \times D = 0,$$

D essendo il divisore comune. È manifesto che si soddisfa ad ambedue nello stesso tempo, facendo primieramente $D = 0$; e questa equazione determinerà una delle incognite per mezzo dell' altra, quando il fattore D le conterrà entrambe; ma se esso non contiene che quantità date ed x, questa incognita sarà determinata, e l' altra resterà del tutto indeterminata. In quanto ai fattori che non contengono x, possono questi ottenersi giovandosi dell' osservazione del n° 50.

Se in seguito si fa congiuntamente

$$P = 0, \qquad Q = 0,$$

si otterranno pure due altre equazioni che potranno dare soluzioni determinate della quistione proposta.

Sia, per esempio,

$$(ax + by - c)(mx + ny - d) = 0,$$
$$(a'x + b'y - c')(mx + ny - d) = 0;$$

supponendo dapprima nullo il secondo fattore, il quale è comune alle due equazioni, si avrà tra le incognite x ed y la sola equazione

$$mx + ny - d = 0;$$

e sotto questo punto di vista la quistione sarà indeterminata; ma togliendo via questo fattore, si cadrà sulle equazioni

$$ax + by - c = 0, \qquad a'x + b'y - c' = 0,$$

ovvero

$$ax + by = c, \qquad a'x + b'y = c',$$

ed in questo senso la quistione sarà determinata, poichè si avranno tante equazioni quante ignote.

Nel caso ove il resto non contenga che quantità date, le due equazioni proposte sono contraddittorie, poichè il divisore comune che stabilisce la loro simultanea esistenza, non può

aver luogo che per una condizione a cui è impossibile soddisfare, perchè essa cade sopra quantità date, e presenta un risultamento assurdo. Questo caso si riferisce a ciò che si osservò nel n° 68 intorno alle equazioni del primo grado.

192. Egli è anche a proposito essere prevenuti che spesso i polinomi in y, pei quali si moltiplicano i dividendi parziali, a fine di rendere possibili le divisioni, introducono spesso nell'ultimo resto fattori estranei alla quistione, e fanno che questo resto non sia la vera equazione finale. Per non essere indotti in errore sopra i valori di y che provengono da questi fattori, la prima idea che si presenta è di sostituire immediatamente nelle equazioni proposte ciascuno dei valori dati dall'equazione che contiene la sola y, poichè tutti i valori che fanno acquistare a queste equazioni un comun divisore, appartengono necessariamente alla quistione, e gli altri debbono essere esclusi. Si comprende ancora che l'equazione finale potrebbe divenire incompleta se si togliesse nel corso del calcolo qualche fattore in y; ma tutte queste circostanze, che sono state discusse dal signor Bret nel 15.° cahier *du Journal de l'École Polytechnique*, e dal signor Lefébure de Fourcy nel n° 3 del 2.° volume della *Correspondance* sulla medesima scuola, rendono poco comodo nella pratica l'uso del procedimento indicato di sopra, e deggiono far preferire quello che passo ad esporre nel numero seguente sulle tracce di Euler (*).

193. Siano le due equazioni

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0,$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = 0;$$

rappresentando con $x - \alpha$ il fattore che dev'essere comune all'una ed all'altra, allorchè y è determinato convenevolmente, si potrà considerare la prima come il prodotto di $x - \alpha$ per un fat-

(*) Si può facilmente conchiudere da ciò che precede, che la ricerca dell'equazione finale tratta da due equazioni a due incognite è in generale un problema determinato; ma la medesima equazione finale può corrispondere ad un'infinità di sistemi di equazioni a due incognite. Invertendo la maniera colla quale si ottiene il massimo comun divisore di due quantità, sarebbe estremamente facile il formare a piacimento questi sistemi; ma siffatta quistione è di pochissimo uso nelle Matematiche elementari, e però non è necessario fermarvisi, nè insistere sulle osservazioni minute alle quali essa potrebbe dar luogo. Questi sono oggetti che bisogna riserbare alla saggezza dei lettori intelligenti, che non mancano giammai di ritrovarli da sè stessi, se qualche circostanza glie ne fa sentire il bisogno.

tore di secondo grado $x^2 + px + q$, e la seconda come il prodotto di $x - \alpha$ per un fattore di terzo grado $x^3 + p'x^2 + q'x + r'$, p e q, p', q' ed r', essendo coefficienti indeterminati: si avrà dunque

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = (x-\alpha)(x^2 + px + q),$$
$$x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S' = (x-\alpha)(x^3 + p'x^2 + q'x + r').$$

Eliminando il binomio $(x - \alpha)$ come un'incognita al primo grado (84), si troverà

$$(x^3 + Px^2 + Qx + R)(x^3 + p'x^2 + q'x + r') =$$
$$(x^4 + P'x^3 + Q'x^2 + R'x + S')(x^2 + px + q).$$

Questo risultamento dee verificarsi senza che siavi bisogno d'assegnare ad x alcun valore particolare; e ciò non può avvenire a meno che il primo membro non sia composto degli stessi termini del secondo; bisognerà dunque, dopo di avere effettuate le moltiplicazioni indicate, eguagliar tra loro i coefficienti che ciascuna potenza di x avrà nei due membri, e si otterranno così le seguenti equazioni:

$$P + p' = P' + p, \qquad Rp' + Qq' + Pr' = S' + R'p + Q'q,$$
$$Q + Pp' + q' = Q' + P'p + q, \qquad Rq' + Qr' = S'p + R'q,$$
$$R + Qp' + Pq' + r' = R' + Q'p + P'q, \qquad Rr' = S'q.$$

Siccome queste equazioni sono sei di numero, e non contengono che cinque quantità indeterminate, cioè, p, q, p', q' ed r', si potranno eliminare queste quantità le quali non oltrepassano il primo grado, e pervenire ad un'equazione che non racchiudendo altro che le quantità P, Q, R, P', Q', R' ed S', esprimerà una condizione senza la quale non si potrebbe soddisfare a quelle della quistione, e sarà per conseguenza l'equazione finale in y (*).

(*) Il metodo di Euler, qui esposto, riducesi a moltiplicare ciascuna delle equazioni proposte per un fattore di cui i coefficienti siano indeterminati, ad eguagliare i prodotti, e a disporre dei coefficienti in modo che i termini affetti dall' incognita x si distruggano tra loro. Sotto questa forma egli l' ha presentato nella sua *Introduzione all' analisi degl' infiniti*. In detta opera denotando k l'esponente del grado dei

Se questa equazione si trovasse identica, ne seguirebbe che le equazioni proposte avrebbero almeno un fattore della forma $x - \alpha$, qualunque fosse il valore di y; e se al contrario l'equazione finale non contenesse che quantità cognite, le equazioni proposte sarebbero contraddittorie.

Quando l'equazione finale può aver luogo, si otterrà il fattore $x - \alpha$ dividendo la prima delle equazioni proposte pel polinomio $x^2 + px + q$; si trova per quoziente

$$x + P - p,$$

e si trascura il resto, perchè esso deve necessariamente esser nullo, allorchè vi si pone per y un valore tratto dall'equazione finale. Eguagliando a zero il quoziente soprascritto, se ne ricava

$$x = p - P,$$

e questo valore di x sarà cognito, o almeno espresso in y, se a p si surroga il suo valore dedotto dalle equazioni di primo grado formate di sopra.

Questa medesima espressione prenderà in generale una forma frazionaria, di maniera che si avrà $x = \frac{M}{N}$, ovvero $Nx - M = 0$; e si vede allora che i valori di y che farebbero svanire simultaneamente M ed N, verificherebbero l'equazione precedente indipendentemente da x; ciò deriverebbe da questo, che per tali valori le due equazioni proposte acquisterebbero un fattore comune di un grado più elevato del primo. Non sarebbe

prodotti, quello del grado dei fattori si troverà $k - m$ per l'equazione del grado m, e $k - n$ per quella del grado n. Il primo termine di ciascuno di questi fattori avendo l'unità per coefficiente, l'uno contiene $k - m$ coefficienti indeterminati, e l'altro $k - n$. La somma dei prodotti racchiude un numero k di termini affetti da x; ma non bisogna distruggerne che $k - 1$, perchè quello che contiene la più alta potenza di x, svanisce da se stesso. Segue da ciò, che il numero totale $2k - m - n$ dei coefficienti indeterminati dev'essere uguale a $k - 1$, e che per conseguenza $k = m + n - 1$: si deve dunque moltiplicare l'equazione del grado m per un fattore del grado $n - 1$, quella del grado n per un fattore del grado $m - 1$, ed eguagliare i prodotti termine a termine, regola simile a quella che si dà nel testo. E giova notare che questo primo metodo di Euler contiene il germe di quello che Bézout ha sviluppato nella sua *Teoria delle Equazioni algebriche*.

difficile risalire sino alle condizioni immediate che indicano questa circostanza; ma simili particolarità oltrepassano i limiti che mi ho prescritti in questo Trattato.

194. Siano per primo esempio le equazioni

$$x^2 + Px + Q = 0, \qquad x^2 + P'x + Q' = 0;$$

i fattori che moltiplicano $x - \alpha$ saranno in questo caso di primo grado, ovvero $x + p$, ed $x + p'$ solamente: si avrà dunque

$$R = 0, \quad R' = 0, \quad S' = 0, \quad q = 0, \quad q' = 0, \quad r' = 0,$$

e verrà

$$\left.\begin{array}{r} P + p' = P' + p, \\ Q + Pp' = Q' + P'p, \\ Qp' = Q'p, \end{array}\right\} \quad \text{ovvero} \quad \left\{\begin{array}{l} p - p' = P - P', \\ P'p - Pp' = Q - Q', \\ Q'p - Qp' = 0. \end{array}\right.$$

Dalle due prime equazioni si trarrà

$$p = \frac{(P - P')P - (Q - Q')}{P - P'},$$

$$p' = \frac{(P - P')P' - (Q - Q')}{P - P'};$$

sostituendo questi valori in luogo di p e di p' nella terza equazione, ne risulterà

$$(P - P')Q'P - (Q - Q')Q' = (P - P')P'Q - (Q - Q')Q,$$

ovvero $$(P - P')(PQ' - QP') + (Q - Q')^2 = 0.$$

Ora se nell' equazione

$$x = p - P$$

si pone per p il suo valore trovato di sopra, ne risulterà, come nel n° 188,

$$x = -\frac{Q - Q'}{P - P'}.$$

195. Inoltre, a fine di porgere al lettore l' occasione di esercitarsi, indicherò i calcoli da eseguire per eliminare x dalle

due equazioni

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0\,, \qquad x^3 + P'x^2 + Q'x + R' = 0.$$

In quest' altro caso si avrà

$$S' = 0\,, \qquad r' = 0 \quad (193)\,,$$

e verranno queste cinque equazioni :

$$\begin{aligned} P + p' &= P' + p\,, \\ Q + Pp' + q' &= Q' + P'p + q\,, \\ R + Qp' + Pq' &= R' + Q'p + P'q\,, \\ Rp' + Qq' &= R'p + Q'q\,, \\ Rq' &= R'q\,, \end{aligned}$$

alle quali darò la seguente forma :

$$\begin{aligned} p - p' &= P - P'\,, \\ P'p - Pp' + q - q' &= Q - Q'\,, \\ Q'p - Qp' + P'q - Pq' &= R - R'\,, \\ R'p - Rp' + Q'q - Qq' &= 0\,, \\ R'q - Rq' &= 0\,. \end{aligned}$$

Si potrebbero, per mezzo delle regole del n° 88, ottenere immediatamente da quattro qualunque di queste equazioni i valori delle incognite p, p', q e q'; ma la semplicità della prima e dell' ultima di queste stesse equazioni permette di giungere con più prontezza al risultamento. Pongo, per abbreviare,

$$P - P' = e\,, \qquad Q - Q' = e'\,, \qquad R - R' = e''\,,$$

e deduco in seguito dalla prima e dall' ultima delle equazioni proposte

$$p' = p - e\,, \qquad q' = \frac{R'q}{R}\,;$$

poi, sostituendo questi valori nelle tre altre e facendo sparire

il denominatore R, viene

$$(P' - P)\,Rp + (R - R')q = R(e' - Pe) \ldots \text{(a)},$$
$$(Q' - Q)\,Rp + (RP' - PR')q = R(e'' - Qe) \ldots \text{(b)},$$
$$(R' - R)\,Rp + (RQ' - QR')q = -R'e \ldots\ldots \text{(c)}.$$

Se ora si cavano dalle equazioni (a) e (b) i valori di p e di q (88), e si manda via il fattore R che sarà comune ai numeratori e ai denominatori, si avrà

$$p = \frac{(e' - Pe)(RP' - PR') - (R - R')(e'' - Qe)}{(P' - P)(RP' - PR') - (R - R')(Q' - Q)},$$

$$q = \frac{(P' - P)(e'' - Qe)R - R(e' - Pe)(Q' - Q)}{(P' - P)(RP' - PR') - (R - R')(Q' - Q)};$$

mettendo questi valori nell'equazione (c), si otterrà un'equazione finale, divisibile per R, che si riduce ad

$$\begin{aligned}&(R' - R)\left[(e' - Pe)(RP' - PR') - (R - R')(e'' - Qe)\right]\\ &+ (RQ' - QR')\left[(P' - P)(e'' - Qe) - (e' - Pe)(Q' - Q)\right]\\ &= - Re\left[(P' - P)(RP' - PR') - (R - R')(Q' - Q)\right],\end{aligned}$$

ove non resta altro a fare che sostituire alle lettere e, e', e'' le quantità da esse rappresentate.

196. Se si avesse fra le tre incognite x, y e z, un egual numero di equazioni denotate da (1), (2) e (3), e si volessero determinare queste incognite, si potrebbe combinare, per esempio, l'equazione (1) con (2) e con (3), per eliminare x, ed eliminare in seguito y dai due risultamenti, che si sarebbero ottenuti; ma bisogna osservare che con questa eliminazione *successiva* le tre equazioni proposte non concorrono della stessa maniera a formare l'equazione finale: l'equazione (1) è adoperata due volte, mentre (2) e (3) non lo sono che una volta; e da ciò succede che il risultamento al quale si perviene, è complicato d'un fattore estraneo alla quistione (84). Bézout nella sua *Teoria delle Equazioni* ha fatto uso d'un metodo che non va soggetto a questo inconveniente, e col quale egli prova che *il grado dell'equazione finale, risultante dall'eliminazione tra un numero qualunque di equazioni complete, che racchiudono un egual numero d'incognite e di gradi qualunque, è uguale al*

prodotto degli esponenti che stabiliscono il grado di queste equazioni. Nel *Complemento* di questo Trattato si troverà la dimostrazione elegante e breve che il sig. Poisson ha dato di questa proposizione, che è d'altronde facilissima a verificarsi sulle equazioni finali rapportate nei n[ri] 194 e 195. Supponendo complete le equazioni proposte in questi numeri, l'incognita y entra al primo grado in P e P', al secondo in Q e Q', al terzo in R ed R'; ne segue che e sarà di primo grado, e' di secondo, e'' di terzo, e che i termini del grado il più elevato dei prodotti indicati nell'equazione finale del n° 194, avranno per esponente 4, ovvero 2 . 2, e quelli dell'equazione finale nel n° 195 avranno 9, ovvero 3 . 3.

Della ricerca delle radici commensurabili, e delle radici uguali delle equazioni numeriche.

197. Dopo di aver fatto conoscere le principali proprietà delle equazioni algebriche, e la maniera di eliminarne le incognite, allorchè ve ne sono più, passo ad occuparmi della risoluzione numerica delle equazioni ad una sola incognita, cioè a dire, della ricerca delle loro radici, qualora i loro coefficienti sono espressi in numeri (*).

Comincerò dal dimostrare che *quando l'equazione proposta non ha per coefficienti che numeri interi, e che quello del suo primo termine è l'unità, le sue radici reali non potrebbero essere espresse per mezzo di frazioni, e non possono essere per conseguenza che numeri interi, o numeri incommensurabili.*

Per provarlo, sia l'equazione

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \dots\dots + Tx + U = 0,$$

nella quale si sostituisca una frazione irriducibile $\frac{a}{b}$ in luogo

(*) Pei gradi superiori al quarto non v'è risoluzione generale; ed a parlar propriamente, non v'è che quella delle equazioni di secondo grado, che si possa riguardare come completa. Le espressioni delle radici delle equazioni del terzo e del quarto grado sono complicatissime, soggette ad eccezioni, e molto meno commode nella pratica dei procedimenti che sono per dare; del resto queste espressioni si troveranno nel *Complemento*.

di x; essa diverrà

$$\frac{a^n}{b^n}+P\frac{a^{n-1}}{b^{n-1}}+Q\frac{a^{n-2}}{b^{n-2}}\ldots\ldots+T\frac{a}{b}+U=0;$$

e riducendo tutti i suoi termini allo stesso deuominatore, si avrà

$$a^n+Pa^{n-1}b+Qa^{n-2}b^2\ldots.+Tab^{n-1}+Ub^n=0,$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$a^n+b(Pa^{n-1}+Qa^{n-2}b\ldots+Tab^{n-2}+Ub^{n-1})=0.$$

Il primo membro di quest' ultima equazione è formato di due parti intere, di cui l'una è divisibile per b, mentre l'altra non lo è affatto (98), poichè si suppone che la frazione $\frac{a}{b}$ sia ridotta alla sua più semplice espressione, ovvero che a e b non abbiano alcun divisore comune; l'una di queste parti non può dunque distruggere l'altra.

198. Questa osservazione è stata appunto quella che ha fatto conoscere l'utilità di mandar via le frazioni da un'equazione, ovvero di rendere interi i suoi coefficienti, in maniera però che il primo termine non ne acquisti uno diverso dall' unità; e vi si riesce *facendo l'incognita proposta uguale ad una nuova incognita divisa pel prodotto di tutti i denominatori della equazione*, poi riducendo tutti i termini allo stesso denominatore col modo del n° 52.

Serva d'esempio l' equazione

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{n}+\frac{c}{p}=0;$$

si prenderà $x=\frac{y}{mnp}$, e ponendo questa espressione di x

nell' equazione proposta, si otterrà

$$\frac{y^3}{m^3n^3p^3}+\frac{ay^2}{m^3n^2p^2}+\frac{by}{mn^2p}+\frac{c}{p}=0\ ;$$

il divisore del primo termine contenendo tutti i fattori degli altri divisori, si moltiplicherà tutta l'equazione per questo divisore, e si ridurrà ciascun termine alla sua più semplice espressione: si troverà allora

$$y^3+anpy^2+bm^2np^2y+cm^3n^3p^2=0.$$

Quando i denominatori m, n, p hanno divisori comuni, non bisogna dividere y che pel più piccolo numero che potesse dividersi ad un tempo per tutti i denominatori. Queste semplicizzazioni sono troppo facili a ravvisarsi, e perciò non è necessario il trattenervisi; mi limiterò soltanto a fare osservare che se tutti i denominatori fossero uguali ad m, basterebbe porre

$x=\frac{y}{m}$.

L'equazione proposta, che sarebbe allora

$$x^3+\frac{ax^2}{m}+\frac{bx}{m}+\frac{c}{m}=0,$$

diverrebbe

$$\frac{y^3}{m^3}+\frac{ay^2}{m^3}+\frac{by}{m^2}+\frac{c}{m}=0,$$

e si avrebbe

$$y^3+ay^2+bmy+cm^2=0.$$

È manifesto che l'operazione eseguita qui sopra riducesi a moltiplicare tutte le radici della proposta pel numero m,

poichè $x=\frac{y}{m}$ dà $y=mx$.

199. Intanto poichè nell' ipotesi che a sia la radice dell' equazione

$$x^n + Px^{n-1} + Qx^{n-2} \ldots + Tx + U = 0$$

si ha

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta \text{ (179)},$$

ne risulta essere a necessariamente uno dei divisori del numero intero U; conseguentemente quando questo numero ha pochi divisori, basterà sostituirli successivamente in luogo di x nell'equazione proposta, per riconoscere se essa abbia o pur no una radice in numeri interi.

Se si ha, per esempio, l'equazione

$$x^3 - 6x^2 + 27x - 38 = 0,$$

il numero 38 non avendo per divisori che i numeri

$$1, \quad 2, \quad 19, \quad 38,$$

questi si sottoporranno alla pruova, tanto positivamente che negativamente, e si troverà che il solo numero intero $+2$ soddisfa all'equazione proposta, ovvero che $x = 2$. Si dividerà in seguito l'equazione proposta per $x - 2$; eguagliando a zero il quoziente, si formerà l'equazione

$$x^2 - 4x + 19 = 0,$$

della quale le radici sono immaginarie; e risolvendo quest'ultima si troverà che la proposta ha tre radici

$$x = 2, \quad x = 2 + \sqrt{-15}, \quad x = 2 - \sqrt{-15}.$$

200. La maniera che ho indicata per iscoprire il numero intero che soddisfa ad un'equazione, diventa impraticabile quando l'ultimo termine di questa equazione ha molti divisori; ma l'equazione

$$U = -a^n - Pa^{n-1} - Qa^{n-2} \ldots - Ta$$

somministra nuove condizioni che abbreviano di molto il calcolo. A fine di rendere il metodo più chiaro, prenderò, come esempio, l'equazione

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0;$$

e rappresentando sempre la radice con a, avrassi

$$a^4 + Pa^3 + Qa^2 + Ra + S = 0,$$
$$S = -Ra - Qa^2 - Pa^3 - a^4,$$

da cui si trarrà

$$\frac{S}{a} = -R - Qa - Pa^2 - a^3.$$

Si vede primieramente da quest'ultima equazione che $\frac{S}{a}$ deve essere un numero intero.

Trasportando in seguito R al primo membro, verrà

$$\frac{S}{a} + R = -Qa - Pa^2 - a^3;$$

facendo per brevità $\frac{S}{a} + R = R'$, e dividendo i due membri dell'equazione

$$R' = -Qa - Pa^2 - a^3$$

per a, conseguirassi

$$\frac{R'}{a} = -Q - Pa - a^2,$$

da cui si conchiuderà che anche $\frac{R'}{a}$ deve essere un numero intero.

Trasportando Q al primo membro, facendo $\frac{R'}{a} + Q = Q'$, e poi dividendo i due membri per a, otterrassi

$$\frac{Q'}{a} = -P - a,$$

da cui s' inferirà che $\frac{Q'}{a}$ deve essere un numero intero.

Portando in fine P nel primo membro, facendo $\frac{Q'}{a}+P=P'$, e dividendo per a, si avrà

$$\frac{P'}{a}=-1.$$

Riunendo le condizioni ora enunciate, si vedrà che il numero a sarà la radice dell' equazione proposta, se soddisferà alle equazioni

$$\frac{S}{a}+R=R',$$

$$\frac{R'}{a}+Q=Q',$$

$$\frac{Q'}{a}+P=P',$$

$$\frac{P'}{a}+1=0$$

di maniera che R', Q' e P' sieno numeri interi.

Segue da ciò, che, per assicurarsi se uno dei divisori a dell' ultimo termine S possa essere la radice dell' equazione proposta, bisogna

1.° *Dividere l' ultimo termine pel divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x;

2.° *Dividere questa somma pel divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^2;

3.° *Dividere questa somma pel divisore* a, *ed aggiungere al quoziente il coefficiente del termine affetto da* x^3;

4.° *Dividere questa somma pel divisore* a, *ed aggiungere al*

quoziente l'unità, o sia il coefficiente del termine affetto da x^4*; il risultamento dovrà essere uguale a zero, se a è effettivamente la radice.*

Le regole enunciate convengono ad un grado qualunque, osservando solamente che non si deve trovare zero per risultamento, se non quando si sarà arrivati al primo termine dell'equazione proposta (*).

201. Allorchè si applicano queste regole ad un esempio numerico, si può disporre il calcolo in modo che tutti i divisori dell'ultimo termine siano sottoposti a ciascuna pruova nello stesso tempo.

Ecco per l'equazione

$$x^4 - 9x^3 + 23x^2 - 20x + 15 = 0$$

il quadro del calcolo:

$$\begin{array}{cccccccc}
+15, & +5, & +3, & +1, & -1, & -3, & -5, & -15, \\
+1, & +3, & +5, & +15, & -15, & -5, & -3, & -1, \\
-19, & -17, & -15, & -5, & -35, & -25, & -23, & -21, \\
 & -5, & -5, & +35, & & & & \\
 & +18, & +18, & +58, & & & & \\
 & +6, & +18, & -58, & & & & \\
 & -3, & +9, & -67, & & & & \\
 & -1, & +9, & +67, & & & & \\
 & 0. & & & & & &
\end{array}$$

(*) Non sarebbe difficile assicurarsi mediante la formola dei quozienti data nel numero 180, che le quantità $\frac{S}{a}$, $\frac{R'}{a}$, $\frac{Q'}{a}$, prese col segno —, sono, cominciando dall'ultimo termine, i coefficienti del quoziente del polinomio

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S$$

diviso per $x - a$, il quale quoziente per conseguenza è

$$x^3 - \frac{Q'}{a}x^2 - \frac{R'}{a}x - \frac{S}{a}.$$

Tutti i divisori dell'ultimo termine 15 sono disposti per ordine di grandezza, tanto col segno + che col segno —, in una stessa linea (questa è la linea dei divisori a).

La seconda linea contiene i quozienti del numero 15 diviso successivamente per tutti i suoi divisori (questa è la linea delle quantità $\frac{S}{a}$).

La terza linea è stata formata aggiungendo alla precedente il coefficiente — 20 che moltiplica x (questa è la linea delle quantità $R' = \frac{S}{a} + R$).

La quarta linea contiene i quozienti di ciascun numero della precedente pel divisore che gli corrisponde (questa è la linea delle quantità $\frac{R'}{a}$). Si sono trascurati in questa linea tutti i numeri che non erano interi.

La quinta linea risulta dai numeri scritti nella precedente, aggiunti al numero 23 che moltiplica x^2 (questa linea comprende le quantità Q').

La sesta linea abbraccia i quozienti dei numeri della precedente pel divisore che gli corrisponde (essa racchiude le quantità $\frac{Q'}{a}$).

La settima comprende le somme dei numeri della precedente e del coefficiente — 9 che moltiplica x^3 (vi si trovano le quantità $\frac{Q'}{a} + P$).

L'ottava finalmente si ottiene dividendo ciascuno dei numeri della precedente pel divisore corrispondente (questa è la linea di $\frac{P'}{a}$); e siccome non si trova — 1 che nella sola colonna in testa alla quale sta + 3, se ne conchiude che l'equazione proposta non ha che una sola radice commensurabile, cioè + 3; di maniera che essa equazione è divisibile per $x - 3$ (*).

Possiamo dispensarci dallo scrivere nel quadro i divisori + 1 e — 1, i quali possono essere sottomessi a la pruova più

(*) Formando il quoziente secondo l'osservazione fatta nella nota precedente, si trova

$$x^3 - 6x^2 + 5x - 5.$$

facilmente con la loro sostituzione immediata nell' equazione proposta.

202. Serva ancora d' esempio l' equazione

$$x^3 - 7x^2 + 36 = 0.$$

Dopo di essersi assicurato che i numeri $+1$ e -1 non soddisfanno punto a questa equazione, si formerà, giusta le regole precedenti, il quadro posto qui sotto, osservando che siccome in questa equazione manca il termine moltiplicato per x, conviene riguardarlo come avente O per coefficiente ; bisogna dunque togliere la terza linea, e dedurre immediatamente la quarta dalla seconda:

+36, +18, +12, +9, +6, +4, + 3, + 2, — 2, — 3, —4, —6, —9, —12, —18, —36,
+ 1, + 2, + 3, +4, +6, +9, +12, +18, —18, —12, —9, —6, —4, — 3, — 2, — 1,
....

+ 1, + 4, + 9, + 9, + 4, + 1,
— 6, — 3, + 2, + 2, — 3, —6,
— 1, — 1, + 1, — 1, + 1, + 1,
0, 0, 0.

Si trovano in questo esempio tre numeri che soddisfanno a tutte le condizioni, cioè: $+6$, $+3$ e -2; si ottengono per conseguenza in tal guisa nel tempo stesso le tre radici di cui l' equazione proposta è suscettibile, e si riconosce che dessa è il prodotto dei tre fattori semplici $x-6$, $x-3$ ed $x+2$.

203. Giova intanto osservare darsi talune equazioni letterali che si trasformano immediatamente in equazioni numeriche.

Se si avesse, per esempio,

$$y^3 + 2py^2 - 33p^2y + 14p^3 = 0,$$

facendo $y = px$, verrebbe

$$p^3x^3 + 2p^3x^2 - 33p^3x + 14p^3 = 0,$$

risultamento divisibile per p^3, e che si riduce ad

$$x^3 + 2x^2 - 33x + 14 = 0.$$

Il divisore commensurabile di quest' ultima equazione essendo $x+7$, e dando per conseguenza $x=-7$, si avrà

$$y=-7p.$$

L'equazione in y è una di quelle che chiamansi *equazioni omogenee*, perchè, facendo astrazione dai coefficienti numerici, ciascuno dei suoi termini contiene il medesimo numero di fattori (*)

204. Quando si conosce una delle radici di un'equazione, può prendersi per incognita la differenza tra questa radice ed una qualunque delle altre; si perviene con questo mezzo ad un' equazione inferiore di un grado alla proposta, e che gode di parecchie notabili proprietà.

Sia l'equazione generale

$$x^m+Px^{m-1}+Qx^{m-2}+Rx^{m-3}\ .\ .\ .\ .\ Tx+U=0,$$

e siano a, b, c, d, ec. le sue radici; sostituendovi $a+y$ in luogo di x, e sviluppando le potenze, emergerà

$$\left.\begin{array}{llll}
a^m & +ma^{m-1}y & +\dfrac{m(m-1)}{2}a^{m-2}y^2 & +\ldots+y^m \\
+Pa^{m-1} & +(m-1)Pa^{m-2}y & +\dfrac{(m-1)(m-2)}{2}Pa^{m-3}y^2 & +\ldots \\
+Qa^{m-2} & +(m-2)Qa^{m-3}y & +\dfrac{(m-2)(m-3)}{2}Qa^{m-4}y^2 & +\ldots \\
+Ra^{m-3} & +(m-3)Ra^{m-4}y & +\dfrac{(m-3)(m-4)}{2}Ra^{m-5}y^2 & +\ldots \\
\ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\
+Ta & +Ty & & \\
+U & & &
\end{array}\right\}=0,$$

risultamento di cui la prima colonna, simile all' equazione pro-

(*) I lettori che desiderano maggiori particolarità sulla ricerca dei *divisori commensurabili* delle equazioni, le troveranno nella III^a parte degli *Elementi d' Algebra* di Clairaut. Questo Geometra si è occupato sì delle equazioni letterali che delle equazioni numeriche.

posta, svanisce da sè, poichè a è una delle radici di questa equazione; cotesta colonna si può dunque togliere, e dividere in seguito per y tutti i termini rimanenti: risulta allora

$$\left.\begin{array}{l} ma^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2} a^{m-2} y + \ldots + y^{m-1} \\ +(m-1)Pa^{m-2} + \frac{(m-1)(m-2)}{2} Pa^{m-3} y + \ldots \\ +(m-2)Qa^{m-3} + \frac{(m-2)(m-3)}{2} Qa^{m-4} y + \ldots \\ +(m-3)Ra^{m-4} + \frac{(m-3)(m-4)}{2} Ra^{m-5} y + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ +T \end{array}\right\} = 0.$$

Questa equazione avrà visibilmente per le sue $m-1$ radici

$$y = b - a\,,\quad y = c - a\,,\quad y = d - a\,,\ \text{ec.}$$

Io la rappresenterò con

$$A + \frac{B}{2} y + \frac{C}{2.3} y^2 \ldots\ldots + y^{m-1} = 0 \ldots\ldots (d),$$

facendo per semplicità

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T = A\,,$$

$$m(m-1)\ a^{m-2} + (m-1)\ (m-2)\ Pa^{m-3} \ldots\ldots = B,$$

ec.,
e denoterò con V l'espressione

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U.$$

205. Se l'equazione proposta ha due radici uguali, se si ha, per esempio, $a = b$, uno dei valori di y, cioè, $b - a$, diverrà nullo; bisognerà dunque che l'equazione (d) sia soddi-

sfatta facendovi $y = 0$; ora questa ipotesi fa svanire tutti i termini, ad eccezione del termine noto A: quest'ultimo dee dunque esser nullo da sè; il valore di a deve dunque soddisfare nello stesso tempo alle due equazioni

$$V = 0 \quad \text{ed} \quad A = 0.$$

Quando la proposta avrà tre radici uguali ad a, cioè, $a = b = c$, due delle radici dell'equazione (d) diverranno nulle nello stesso tempo, cioè, $b - a$ e $c - a$; in questo caso l'equazione (d) sarà divisibile due volte di seguito per $y - 0$ (179), vale a dire, per y; ora ciò non può avvenire che quando i coefficienti A e B sono nulli: bisogna dunque che il valore di a soddisfaccia nel tempo stesso alle tre equazioni

$$V = 0, \quad A = 0, \quad B = 0.$$

Proseguendo questi ragionamenti, si vedrà che quando la proposta avrà quattro radici uguali, l'equazione (d) avrà tre radici uguali a zero, ovvero sarà divisibile tre volte di seguito per y, il che richiede che i coefficienti A, B e C siano nulli nello stesso tempo, e che il valore di a soddisfaccia per conseguenza simultaneamente alle quattro equazioni.

$$V = 0, \quad A = 0, \quad B = 0, \quad C = 0.$$

Non solamente si può con siffatto mezzo riconoscere se una radice data a si trovi più volte tra quelle dell'equazione proposta, ma se ne deduce ancora un metodo per assicurarsi se questa equazione abbia radici ripetute. delle quali s'ignora il valore.

A tale oggetto è d'uopo osservare che quando si ha $A = 0$, ovvero

$$ma^{m-1} + (m-1)Pa^{m-2} + (m-2)Qa^{m-3} \ldots + T = 0,$$

si può riguardare a come la radice dell'equazione

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \ldots + T = 0,$$

x indicando allora un'incognita qualunque; e poichè a si trova essere anche la radice dell'equazione $V = 0$, cioè dell'equazione

$$x^m + Px^{m-1} + \text{ec.} = 0,$$

segue dal n° 189 che $x - a$ è un fattore delle due equazioni suddivisate.

Cangiando ancora a in x nelle quantità B, C, ec., il binomio $x - a$ diverrà similmente fattore delle nuove equazioni $B = 0$, $C = 0$, ec., se la radice a annulla le quantità primitive B, C, ec.

Ciò che si è detto intorno alla radice a, converrebbe ugualmente ad ogni altra radice che fosse ripetuta più volte; così, cercando col metodo del massimo comun divisore i fattori comuni alle equazioni

$$V = 0, \qquad A = 0, \qquad B = 0, \qquad C = 0, \text{ ec.},$$

questi fattori daranno le radici uguali della proposta nell' ordine seguente.

I fattori comuni alle due prime equazioni solamente, sono fattori doppi della proposta, e ciò vuol dire, che se si trova per comun divisore tra $V = 0$ ed $A = 0$ un' espressione della forma $(x - \alpha)(x - \beta)$, per esempio, l' incognita x avrà due valori uguali ad α, e due altri uguali a β, ovvero la proposta avrà questi quattro fattori:

$$(x - \alpha), \qquad (x - \alpha), \qquad (x - \beta), \qquad (x - \beta).$$

I fattori comuni nel tempo stesso alle tre prime delle equazioni suddette, indicano fattori tripli nella proposta; cioè a dire, se i primi sono della forma $(x - \alpha)(x - \beta)$, per esempio, i secondi saranno di quest' altra: $(x - \alpha)^3(x - \beta)^3$. È facile spingere queste considerazioni tanto lontano quanto vorrassi.

206. Egli è a proposito intanto l'osservare che l' equazione $A = 0$, la quale pel cangiamento di a in x diventa

$$mx^{m-1} + (m-1)Px^{m-2} + (m-2)Qx^{m-3} \dots + T = 0,$$

si deduce immediatamente dall' equazione $V = 0$, ovvero dalla proposta

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \dots + Tx + U = 0,$$

moltiplicando ciascuno dei termini di quest' ultima per l' esponente della potenza di x che esso contiene, e diminuendo in seguito quest' esponente di un' unità; sopra di che bisogna avvertire che il termine U essendo equivalente ad $U \times x^0$, deve svanire in quest' operazione, nella quale esso trovasi moltipli-

cato per 0. L'equazione $B=0$ si trae da $A=0$, come $A=0$ s'ottiene da $V=0$; $C=0$ si ricava da $B=0$, come questa da $A=0$, e così di seguito (*).

207. Per dilucidare ciò che precede con un esempio, prenderò l'equazione

$$x^5-13x^4+67x^3-171x^2+216x-108=0;$$

l'equazione $A=0$ diventa in questo caso

$$5x^4-52x^3+201x^2-342x+216=0;$$

il suo divisore comune con la proposta è

$$x^3-8x^2+21x-18.$$

Questo divisore essendo di terzo grado, deve esso stesso racchiudere più fattori; bisogna dunque cercare se mai ne abbia comuni con l'equazione $B=0$, la quale in questo caso è

$$20x^3-156x^2+402x-342=0;$$

e trovasi di fatto per risultamento $x-3$: dunque la proposta ha tre radici eguali a 3, ovvero ammette $(x-3)^3$ nel numero dei suoi fattori. Dividendo allora il primo divisore comune per $x-3$ tante volte di seguito per quante si può, cioè due volte, si trova $x-2$. Questo divisore non essendo comune che all'equazione proposta ed all'equazione $A=0$, non entra che due volte nella proposta. Si vede in fine che questa equazione è equivalente ad

$$(x-3)^3(x-2)^2=0.$$

208. L'equazione (d), che dà le differenze tra la radice b e ciascuna delle altre, quando vi si pone b in luogo di a, le differenze tra la radice c e ciascuna delle altre, quando vi si pone c in luogo di a, ec., non cangiando di forma per queste diverse sostituzioni, e conservando gli stessi coefficienti

(*) Si conchiuderebbe facilmente da ciò che precede che il divisore comune tra le equazioni $V=0$, $A=0$, contiene i fattori eguali, elevati ad una potenza minore di un'unità che nell'equazione proposta; ma la conoscenza di questa proposizione non essendo necessaria in ciò che segue, l'ho rimessa al *Complemento*, ove trovasi dimostrata d'una maniera che mi pare semplicissima.

come la proposta, può essere generalizzata in modo da contenere tutte le differenze delle radici combinate a due a due. Per conseguire ciò basta eliminarne a col mezzo dell'equazione

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots + Ta + U = 0;$$

perciocchè il risultamento non dipendendo che dai coefficienti, e non conservando alcuna traccia della radice che si è considerata in particolare, converrà egualmente a tutte.

È evidente che l'equazione finale deve elevarsi al grado $m(m-1)$, poichè le sue radici

$$\begin{array}{llll} a-b, & a-c, & a-d, & \text{ec.}, \\ b-a, & b-c, & b-d, & \text{ec.}, \\ c-a, & c-b, & c-d, & \text{ec.}, \\ \text{ec.}, & & & \end{array}$$

sono tante di numero quante sono le permutazioni che possono formarsi disponendo a due a due le m lettere a, b, c, ec. Di più, poichè le quantità

$a-b$ e $b-a$, $a-c$ e $c-a$, $b-c$ e $c-b$, ec.

non differiscono che pel segno, le radici dell'equazione saranno uguali a due a due, astrazion fatta dal segno; di maniera che quando si avrà $y = \alpha$, si avrà nello stesso tempo $y = -\alpha$. Risulta da ciò, che questa equazione non deve contenere che termini ove l'incognita si eleva ad un grado pari; poichè il suo primo membro deve essere il prodotto d'un certo numero di fattori di secondo grado della forma

$$y^2 - \alpha^2 = (y-\alpha)(y+\alpha) \text{ (184)};$$

essa dunque sarà della forma

$$y^{2n} + py^{2n-2} + qy^{2n-4} \ldots\ldots + ty^2 + u = 0.$$

Facendo $y^2 = z$, la si cangierà in

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots\ldots + tz + u = 0;$$

e l'incognita z essendo il quadrato di y, avrà per valori i quadrati delle differenze delle radici della proposta.

Cade in acconcio osservare che le differenze tra le radici reali della proposta essendo necessariamente reali, i loro quadrati saranno positivi, e che per conseguenza l'equazione in z non avrà che radici positive, se la proposta le ha tutte reali.

Serva d'esempio l'equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0;$$

facendovi $x = a + y$, si avrà

$$\left.\begin{array}{l} a^3 + 3a^2y + 3ay^2 + y^3 \\ -7a - 7\ \ y \\ +7 \end{array}\right\} = 0.$$

Cancellando i termini $a^3 - 7a + 7$, la di cui somma è nulla in virtù dell'equazione proposta, e dividendo il resto per y, verrà

$$3a^2 - 7 + 3ay + y^2 = 0;$$

eliminando a tra questa equazione e l'equazione

$$a^3 - 7a + 7 = 0,$$

si avrà

$$y^6 - 42y^4 + 441y^2 - 49 = 0;$$

facendo $z = y^2$, verrà in fine

$$z^3 - 42z^2 + 441z - 49 = 0.$$

209. La sostituzione di $a + y$ in luogo di x nell'equazione

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots + U = 0 \quad (204)$$

si adopera pure alle volte per fare svanire uno dei termini di questa equazione. Si ordina allora il risultamento secondo le potenze della y la quale rimpiazza l'incognita x, e si riguarda la quantità a come una seconda incognita, che si determina uguagliando a zero il coefficiente del termine che si vuole fare sparire; si ha di questa maniera

$$\left.\begin{array}{l} y^m + may^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2}a^2y^{m-2} \ldots + a^m \\ + Py^{m-1} + (m-1)Pay^{m-2} \ldots + Pa^{m-1} \\ \qquad + \qquad Qy^{m-2} \ldots + Qa^{m-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad + U \end{array}\right\} = 0,$$

Se il termine che si vuole mandar via è il secondo, cioè quello che è affetto da y^{m-1}, si farà $ma + P = 0$, da cui si trae $a = -\frac{P}{m}$. Sostituendo questo valore nel risultamento, non restano che i termini affetti da

$$y^m, \quad y^{m-2}, \quad y^{m-3}, \quad \text{ec.}$$

Da ciò che precede risulta, che *si eliminerà il secondo termine da un' equazione, sostituendo all'incognita di questa equazione una nuova incognita, alla quale si aggiungerà il coefficiente del secondo termine preso col segno contrario a quello da cui è affetto, e diviso per l' esponente del primo termine.*

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3 + 6x^2 - 3x + 4 = 0;$$

la regola dà

$$x = y - \frac{6}{3} = y - 2,$$

e sostituendo, verrà l' equazione

$$\left.\begin{array}{r} y^3 - 6y^2 + 12y - 8 \\ + 6y^2 - 24y + 24 \\ - 3y + 6 \\ + 4 \end{array}\right\} = 0,$$

che riducesi ad

$$y^3 - 15y + 26 = 0,$$

ove il termine affetto da y^2 non entra più. Si farebbe svanir

il terzo termine (affetto da y^{m-2}), eguagliando a zero l'aggregato delle quantità che lo moltiplicano, cioè stabilendo l'equazione

$$\frac{m(m-1)}{2}a^2+(m-1)Pa+Q=0.$$

Seguendo quest' andamento, si riconoscerà facilmente che l'eliminazione del quarto termine dipende da un' equazione di terzo grado, e così di seguito fino all' ultimo, che non può farsi svanire che stabilendo l' equazione

$$a^m+Pa^{m-1}+Qa^{m-2}\ldots.+U=0,$$

assolutamente simile alla proposta.

La ragione di cotesta somiglianza è facile a scoprirsi. Eguagliare a zero l'ultimo termine dell'equazione in y, è lo stesso di supporre che uno dei valori di questa incognita è zero; e se si fa quest'ipotesi nell'equazione $x=y+a$, ne risulta $x=a$; vale a dire che in questo caso la quantità a è necessariamente uno dei valori di x.

210. Si ha qualche volta bisogno di scomporre un'equazione in fattori d'un grado superiore al primo; non potrei esporre in questo luogo con tutte le particolarità i diversi metodi che si possono a quest'effetto adoperare; darò soltanto un esempio di siffatta ricerca.

Sia l' equazione

$$x^5-24x^3+12x^2-11x+7=0,$$

della quale bisogna determinare i fattori di terzo grado: rappresento uno di questi fattori con

$$x^3+px^2+qx+r,$$

i coefficienti p, q, r essendo indeterminati. Essi debbono esser tali che il primo membro dell'equazione proposta sia esattamente divisibile pel fattore

$$x^3+px^2+qx+r$$

indipendentemente da alcun valore di x; ma facendo attualmente la divisione, si trova per resto

$$\begin{aligned}&-(p^3-2pq-24p+r-12)x^2\\&-(p^2q-pr-q^2-24q+11)x\\&-(p^2r-qr-24r-7),\end{aligned}$$

espressione che si annullerebbe da sè stessa, ed indipendentemente da x, se vi si mettessero in luogo delle lettere p, q ed r i valori che convengono allo stato della quistione: si avrebbe dunque allora

$$p^3 - 2pq - 24p + r - 12 = 0,$$
$$p^2q - pr - q^2 - 24q + 11 = 0,$$
$$p^2r - qr - 24r - 7 = 0.$$

Queste tre equazioni contengono le condizioni necessarie per determinare le incognite p, q ed r; ed alla di loro risoluzione si riduce la quistione proposta.

Della risoluzione per approssimazione delle equazioni numeriche.

211. Dopo di avere esaurita la ricerca dei divisori commensurabili, bisogna ricorrere ai metodi di approssimazione, i quali sono fondati sul principio seguente:

Quando si sono trovate due quantità che, sostituite in un' equazione in luogo dell' incognita, danno due risultamenti di segno contrario, si può conchiudere che una delle radici dell' equazione proposta è compresa tra queste due quantità, ed è per conseguenza reale.

Sia, per esempio, l' equazione

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0;$$

se si sostituisce successivamente 2 e 20 in luogo di x, il primo membro, in vece di ridursi a zero, risulta uguale a -31 nel primo caso, ed a $+2939$ nel secondo, e segue da ciò, che questa equazione ha una radice reale compresa tra 2 e 20, cioè, maggiore di 2 e minore di 20.

Siccome avrò spesso bisogno di esprimere una tale relazione, adoprerò i segni $>$ e $<$ di cui si servono gli algebristi per indicare l' ineguaglianza di due grandezze, situando la maggiore delle due quantità avanti l'apertura del segno, e l' altra alla punta. Scriverò in conseguenza

$x > 2$, per x maggiore di 2,

$x < 20$, per x minore di 20.

Ciò posto, per provare l' asserzione precedente, si può

ragionare nel seguente modo. Riunendo da un lato i termini positivi dell'equazione proposta, e dall'altro i termini negativi, si avrà

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1) ,$$

quantità che si è trovata negativa quando si è fatto $x = 2$, perchè in questa ipotesi

$$x^3 + 7x < 13x^2 + 1 ,$$

e che è diventata positiva quando si è fatto $x = 20$, perchè allora

$$x^3 + 7x > 13x^2 + 1 ;$$

di più è evidente che le quantità

$$x^3 + 7x \quad \text{e} \quad 13x^2 + 1 ,$$

crescono entrambe, allorchè si danno ad x valori di mano in mano più grandi, e che prendendo questi valori tanto vicini gli uni agli altri per quanto vorrassi, si potranno far crescere le quantità proposte per gradi di quella piccolezza che si giudicherà a proposito. Ma poichè la prima delle quantità suddette, in principio più piccola della seconda, è divenuta in seguito più grande, è evidente che essa ha un accrescimento più rapido dell'altra, per mezzo del quale compensa l'eccesso che quest'ultima aveva sopra di lei, e poi la sorpassa: v'ha dunque certamente un momento nel quale queste due quantità sono uguali.

Il valore di x, qualunque esso sia (ma di cui è stata già dimostrata l'esistenza), che rende

$$x^3 + 7x = 13x^2 + 1 ,$$

dando

$$x^3 + 7x - (13x^2 + 1) = 0 ,$$

ovvero

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0 ,$$

è necessariamente la radice dell'equazione proposta.

Ciò che si è veduto sull'equazione particolare

$$x^3 - 13x^2 + 7x - 1 = 0 ,$$

può applicarsi ad un'equazione qualunque, della quale dinoterò i termini positivi con P, ed i negativi con N. Sia a il valore di x che ha dato un risultamento negativo, e b quello che ne ha dato uno positivo; queste due circostanze non hanno potuto altrimenti aver luogo che per questo, che per la prima sostituzione si aveva $P < N$, e per la seconda $P > N$: P avendo dunque sorpassato N, se ne conchiuderà, come di sopra, che esiste un valore di x compreso tra a e b, il quale dà $P = N$. (*)

(*) I ragionamenti fatti qui sopra, riguardati in generale come evidentissimi, hanno ricevuto dal Signor Encontre utili sviluppi, che credo dover qui riportare per quei lettori che desiderassero pruove più circostanziate.

1.° Ecco come si può dimostrare la possibilità di far prendere accrescimenti quanto piccoli si vorrà ai polinomi P ed N. Sia $P = \alpha x^m + \beta x^n \ldots\ldots + \delta x^q$, m essendo il più alto esponente di x; se vi si pone $a + y$ in luogo di x, questo polinomio prenderà la forma

$$A + By + Cy^2 \ldots\ldots + Ty^m,$$

i coefficienti $A, B, C \ldots\ldots T$, essendo di numero e di valore finito; il primo termine A sarà il valore che prende il polinomio P, allorchè $x = a$; il resto

$$By + Cy^2 \ldots\ldots + Ty^m = y\left(B + Cy \ldots\ldots + Ty^{m-1}\right)$$

sarà la quantità di cui questo stesso polinomio s'accresce quando si aumenta di y il valore $x = a$. Ciò posto, se S rappresenta il più grande dei coefficienti $B, C, \ldots T$, si avrà

$$B + Cy \ldots\ldots + Ty^{m-1} < S\left(1 + y \ldots + y^{m-1}\right);$$

ma

$$1 + y \ldots + y^{m-1} = \frac{1 - y^m}{1 - y} \quad (158);$$

dunque

$$y\left(B + Cy \ldots\ldots + Ty^{m-1}\right) < Sy\frac{(1 - y^m)}{1 - y},$$

e per conseguenza l'accrescimento del polinomio P sarà più piccolo di una quantità data qualunque c, se si rende $\frac{Sy(1 - y^m)}{1 - y}$ minore di

Il ragionamento fatto di sopra richiede che i valori che si danno ad x, siano ambidue positivi o ambidue negativi; poichè quando hanno segni differenti, quello che è negativo, fa cangiar di segno a quei termini dell'equazione proposta, che contengono potenze dispari di x, e per conseguenza le espressioni P ed N non sono più composte della stessa maniera nell'una e nell'altra sostituzione. Questa difficoltà sparisce facendo $x=0$; con questo mezzo l'equazione proposta riducesi al suo ultimo termine, il quale si trova necessariamente di segno contrario a quello del risultamento della prima, o della seconda sostituzione. Sia, per esempio, l'equazione

$$x^4-2x^3-3x^2-15x-3=0,$$

di cui il primo membro, allorchè vi si fa

$$x=-1 \quad \text{ed} \quad x=2,$$

diventa $+12$ e -45. Supponendo $x=0$, esso riducesi a -3; le due sostituzioni

$$x=0 \quad \text{ed} \quad x=-1,$$

questa quantità: ora si perverrà a ciò facendo $\frac{Sy}{1-y}=c$, giacchè allora $y=\frac{c}{S+c}$ essendo <1, la quantità $\frac{Sy(1-y^m)}{1-y}$, eguale ad $\frac{Sy}{1-y}-\frac{Sy^{m+1}}{1-y}$, sarà necessariamente minore della quantità c, della quale niente limita la piccolezza.

2.° Se si denota con h l'accrescimento del polinomio P, con k quello del polinomio N, il cangiamento che ne risulterà nel valore della loro differenza sarà $h-k$, e potrà essere reso più piccolo d'una quantità data, rendendo più piccolo di questa medesima quantità l'accrescimento che è il maggiore dei due: si potrà dunque nell'intervallo da $x=a$ ad $x=b$ far variare la differenza dei polinomi P ed N per quantità tanto piccole, quanto si vorrà; e poichè essa passa dal negativo al positivo in questo intervallo, la medesima si approssimerà necessariamente a zero tanto da vicino, quanto vorrassi. (Vedete gli *Annali di Matematiche pure ed applicate*, pubblicati dal Signor Gergonne, T. IV, p. 210.)

danno dunque risultamenti di segno contrario : ma mettendo $-y$ in luogo di x, l'equazione proposta si cangia in

$$y^4 + 2y^3 - 3y^2 + 15y - 3 = 0,$$

e si ha

$$P = y^4 + 2y^3 + 15y, \qquad N = 3y^2 + 3,$$

da cui ricavasi

$$P < N, \quad \text{quando} \quad y = 0,$$

$$P > N, \quad \text{quando} \quad y = 1.$$

Si può dunque ragionare nel caso attuale come nel precedente, e conchiuderne che l'equazione in y ha una radice reale compresa tra 0 e $+1$; donde segue che quella dell'equazione in x si trova tra 0 o -1, e per conseguenza tra $+2$ e -1.

La proposizione che ho enunciata non potendo presentare che casi compresi nell'uno o nell'altro di quelli che ho esaminati, è sufficientemente dimostrata.

212. Prima di andare più innanzi, farò osservare che, *qualunque siano il grado di un'equazione ed i coefficienti di lei, si può sempre assegnare un numero il quale, sostituito in luogo dell'incognita, renda il primo termine maggiore della somma di tutti gli altri.* Si scorge a prima vista la verità di questa asserzione, per poco che siasi osservato l'andamento che seguono gli accrescimenti delle diverse potenze di un numero maggiore dell'unità (126), poichè, tra queste potenze, la più elevata sorpassa tanto di più quelle che le sono inferiori, per quanto il numero di cui si tratta, è più considerevole, di modo che niente limita l'eccesso della prima sopra ciascuna dello altre; ecco inoltre il modo di trovare un numero che soddisfaccia alla condizione enunciata.

È manifesto che il caso il più sfavorevole sarebbe quello nel quale si rendessero tutti i coefficienti dell'equazione eguali al maggiore tra essi, vale a dire, se in vece di

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U,$$

si prendesse

$$x^m + Sx^{m-1} + Sx^{m-2} \ldots\ldots + Sx + S,$$

denotando S il maggiore dei coefficienti P, Q, ... T, U. La differenza tra il primo termine e la somma di tutti gli altri essendo allora

$$x^m - S(x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1),$$

si osserverà che

$$x^{m-1} + x^{m-2} \ldots\ldots + 1 = \frac{x^m - 1}{x - 1} \quad (158),$$

e mediante questa espressione si cangerà la precedente in

$$x^m - \frac{S(x^m - 1)}{x - 1}, \quad \text{ovvero in} \quad x^m - \frac{Sx^m}{x-1} + \frac{S}{x-1}.$$

Se si pone in seguito M in luogo di x, verrà

$$M^m - \frac{SM^m}{M-1} + \frac{S}{M-1},$$

quantità che si renderà positiva, facendo

$$M^m = \frac{SM^m}{M-1};$$

poichè se si divide ciascun termine di questa equazione per M^m, si avrà

$$1 = \frac{S}{M-1}, \quad \text{e di qui} \quad M = S + 1.$$

Sostituendo adunque in vece di x il maggiore dei coefficienti dell' equazione, aumentato dell' unità, si renderà il primo termine maggiore della somma di tutti gli altri; e per conseguenza il suo segno determinerà quello del risultamento della sostituzione.

Il numero M potrebbe esser minore, se non si volesse

che rendere la parte positiva dell'equazione proposta maggiore della parte negativa; giacchè basterebbe, per quest'oggetto, rendere il primo termine superiore alla somma che darebbero tutti gli altri, quando anche i loro coefficienti fossero uguali, non già al maggiore di tutti, ma solamente al massimo tra i coefficienti negativi: non si dovrebbe dunque che prendere per M questo coefficiente aumentato dell'unità (*).

Segue da ciò le radici positive dell'equazione proposta essere necessariamente comprese tra 0 ed $S+1$.

Si può ancora scoprire con lo stesso mezzo un limite delle radici negative; bisogna, per questo, sostituire $-y$ in luogo di x nell'equazione proposta, e fare in modo da rendere il primo termine positivo, se mai diventi negativo (178). È evidente, in forza di questa trasformazione, che i valori positivi di y corrispondono ai valori negativi di x, e reciprocamente. Se R è il massimo coefficiente negativo dopo tal cangiamento, $R+1$ sarà un limite dei valori positivi di y; per conseguenza $-R-1$ sarà quello dei valori negativi di x.

Finalmente se si volesse ottenere per la minore delle radici un limite più approssimato di zero, vi si perverrebbe sostituendo $\frac{1}{y}$ in luogo di x nell'equazione proposta, e preparando la trasformata in y, come è stato prescritto nel n° 178. I valori di y essendo inversi di quelli di x, il più grande dei primi corrisponderebbe al più piccolo dei secondi, e reciprocamente. Se dunque $S'+1$ denotasse il limite superiore dei valori di y, cioè se si avesse

$$y < S'+1,$$

il che darebbe

$$\frac{1}{x} < S'+1,$$

ne risulterebbe successivamente

$$1 < (S'+1)x, \qquad \frac{1}{S'+1} < x.$$

(*) Si trovano nella *Risoluzione delle equazioni numeriche* di Lagrange formule che danno limiti più ristretti; ma ciò che ho detto di sopra basta per rendere indipendenti dalla considerazione dell'infinito le proposizioni fondamentali della risoluzione delle equazioni.

In fatti è facile vedere che si può, senza turbare l'ordine di grandezza di due quantità separate dai segni $<$ o $>$, moltiplicarle o dividerle per una stessa quantità, e che si può ancora aggiungere o sottrarre la stessa quantità da ciascun lato di cotesti segni, i quali godono a tal proposito delle stesse proprietà del segno d'uguaglianza.

213. Segue da ciò che precede, che *ogni equazione di grado dispari ha necessariamente una radice reale di segno contrario a quello del suo ultimo termine*; perciocchè se si prende il numero M tale, che il segno della quantità

$$M^m + PM^{m-1} + QM^{m-2} \ldots\ldots + TM \pm U$$

non dipenda che da quello del suo primo termine M^m, l'esponente m essendo dispari, il termine M^m sarà dello stesso segno del numero M (128). Ciò posto, se l'ultimo termine U ha il segno $+$, facendo $x = -M$, si avrà un risultamento di segno contrario a quello che dà la supposizione di $x = 0$; e da ciò si scorge che la proposta ha una radice tra 0 e $-M$, cioè, negativa. Se l'ultimo termine U ha il segno $-$, si fa allora $x = +M$; viene un risultamento di segno contrario a quello che corrisponde alla supposizione di $x = 0$; ed in questo caso la radice si trova tra 0 e $+M$, vale a dire, è positiva.

214. Allorchè l'equazione proposta è di grado pari, il primo termine M^m restando positivo, qualunque sia il segno che si dà ad M, non possiamo assicurarci, in virtù di ciò che precede, dell'esistenza d'una radice reale, se l'ultimo termine ha il segno $+$; poichè, sia che si faccia $x = 0$, sia che si faccia $x = \pm M$, si ha sempre un risultamento positivo; ma quando l'ultimo termine è negativo, si trovano, facendo

$$x = +M, \qquad x = 0, \qquad x = -M,$$

tre risultamenti affetti respettivamente dai segni $+$, $-$ e $+$, e per conseguenza l'equazione proposta ha in questo caso almeno due radici reali, una positiva, compresa tra M e 0, l'altra negativa, compresa tra 0 e $-M$: dunque *ogni equazione di grado pari, l'ultimo termine della quale è negativo, ha almeno due radici reali, l'una positiva e l'altra negativa.*

215. Vengo ora alla risoluzione delle equazioni per approssimazione, ed a fine di rendere più chiaro ciò che debbo dire su questo soggetto, prendo da principio un esempio. Sia l'equazione

$$x^4 - 4x^3 - 3x + 27 = 0;$$

il suo massimo coefficiente negativo essendo -4, segue dal n° 212 che la sua massima radice positiva sarà minore di 5. Sostituendovi $-y$ in vece di x, essa diventa

$$y^4 + 4y^3 + 3y + 27 = 0;$$

e questo risultamento avendo tutti i suoi termini positivi, mostra che y deve essere negativo; da ciò segue che x è necessariamente positivo, e che l'equazione proposta non potrebbe avere radici negative: le radici reali son dunque comprese tra 0 e $+5$.

Il primo metodo che si presenta per ottenere limiti più approssimati, consiste a supporre successivamente

$$x = 1, \quad x = 2, \quad x = 3, \quad x = 4;$$

e se due di questi numeri, sostituiti nell'equazione proposta, danno risultamenti di segno contrario, essi saranno nuovi limiti delle radici. Ora facendo

$x = 1$, il primo membro di lei diventa $+21$,

$x = 2$ . . . . $+5$,

$x = 3$ . . . . -9,

$x = 4$ . . . . $+15$;

si vede dunque che quest'equazione ha due radici reali, l'una compresa fra 2 e 3, e l'altra fra 3 e 4. Per approssimarsi ancor più alla prima, si prenderà il medio tra i due numeri che la racchiudono, il che darà 2, 5 (*Aritm.* 129); si supporrà in seguito $x = 2, 5$: il risultamento di questa sostituzione, il quale è

$$+39{,}0625 - 62{,}5 - 7{,}5 + 27 = -3{,}9375,$$

fa vedere, perchè è negativo, che la radice cercata cade tra 2 e 2, 5. Prendendo il medio aritmetico tra questi due numeri, verrà 2, 25; limitandosi ad $x = 2, 3$, si avrà la radice cercata, differente dal suo vero valore per meno di un decimo, e si potrà andare rapidissimamente tanto da presso al

vero valore di siffatta radice, quanto si vorrà, col metodo seguente, dovuto a Newton.

Si farà $x = 2,3 + y$; è evidente che l'incognita y non sarà che una piccola frazione, di cui si potrà trascurare il quadrato e le potenze superiori: si avrà in tal modo

$$\begin{aligned} x^4 &= \quad (2,3)^4 + 4\,(2,3)^3 y, \\ -4x^3 &= -4\,(2,3)^3 - 12\,(2,3)^2 y, \\ -3x &= -3\,(2,3) \quad -3y; \end{aligned}$$

mediante queste sostituzioni l'equazione proposta diverrà

$$-0,5839 - 17,812y = 0,$$

e darà

$$y = -\frac{0,5839}{17,812}.$$

In questa prima operazione non si anderà al di là delle parti centesime; e ne risulterà

$$y = -0,03, \qquad \text{ed} \qquad x = 2,3 - 0,03 = 2,27.$$

Per ottenere un nuovo valore di x più esatto del precedente, si supporrà $x = 2,27 + y'$; e sostituendo nell'equazione proposta, non si terrà conto che delle prime potenze di y'. Si troverà

$$-0,04595359 - 18,046468y' = 0,$$

da cui ricavasi

$$y' = -\frac{0,04595359}{18,046468} = -0,0025,$$

e per conseguenza $x = 2,2675$. Si può, continuando a procedere in questo modo, arrivare ad un valore di x per quanto si vorrà prossimo al vero.

La seconda radice reale, compresa tra 3 e 4, calcolata alla stessa maniera, sarà

$$x = 3,6797,$$

arrestandosi alla quarta cifra decimale.

216. Si apprezzerà il grado d'esattezza del metodo che ho esposto, cercando il limite dei valori dei termini che si trascurano.

Se l'equazione proposta fosse

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} \ldots\ldots + Tx + U = 0,$$

la sostituzione di $a+y$ in vece di x darebbe per risultamento il primo di quelli che ho trovati nel n° 204, perchè a non essendo la radice dell'equazione, ma solamente un valore approssimato di x, non rende nulla la quantità

$$a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} \ldots\ldots + Ta + U.$$

Rappresentando quest'ultima con V, si avrà, in vece dell'equazione (d) del numero citato, la seguente

$$V + \frac{A}{1}y + \frac{B}{1.2}y^2 + \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots + y^m = 0,$$

della quale si ricaverà

$$Ay = -V - \frac{B}{1.2}y^2 - \frac{C}{1.2.3}y^3 \ldots\ldots - y^m,$$

$$y = -\frac{V}{A} - \frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Trascurando le potenze di y superiori alla prima, ed arrestandosi in conseguenza ad

$$y = -\frac{V}{A},$$

l'errore sarà

$$-\frac{By^2}{1.2A} - \frac{Cy^3}{1.2.3A} \ldots\ldots - \frac{y^m}{A}.$$

Se a non differisce dal vero valore di x che d'una quantità minore di $\frac{1}{p}a$, l'errore suddetto diverrà minore del numero che si otterrebbe mettendovi $\frac{1}{p}a$ in luogo di y, il che darebbe

$$-\frac{B}{1.2A}\left(\frac{a}{p}\right)^2-\frac{C}{1.2.3A}\left(\frac{a}{p}\right)^3\ldots-\frac{1}{A}\left(\frac{a}{p}\right)^m.$$

Calcolando questa quantità, si vedrà con sicurezza se essa può essere disprezzata a fronte di $\frac{V}{A}$; e se si trovasse troppo grande relativamente a ciò, bisognerebbe cercare per a un numero più prossimo al vero valore di x.

Del resto, quando si sono calcolati parecchi dei numeri y, y', y'', ec., e i risultamenti ottenuti formano una serie decrescente, l'approssimazione non potrebbe essere dubbiosa.

217. Il metodo di cui ho fatto uso, è conosciuto sotto il nome di *Metodo delle Sostituzioni successive*. Lagrange lo ha considerabilmente perfezionato. (Si vegga la *Risoluzione delle Equazioni numeriche*). Egli ha osservato dapprima che non sostituendo che numeri interi, si potrebbe passare al di là di parecchie radici senza ravvisarle. Ed in vero, se si avesse, per esempio, l'equazione

$$\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-3\right)\left(x-4\right)=0,$$

e si sostituissero in luogo di x i numeri 0, 1, 2, 3, ec., si passerebbe al di là delle radici $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ senza riconoscerne l'esistenza, giacchè si avrebbe

$$\left(0-\frac{1}{3}\right)\left(0-\frac{1}{2}\right)\left(0-3\right)\left(0-4\right)=+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times3\times4,$$

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-3\right)\left(1-4\right)=+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times3,$$

risultamenti dell'istesso segno. È facile vedere che una tale circostanza dipende da questo, che la sostituzione di 1 in luogo di x fa cangiar di segno nel tempo stesso ai due fattori $x-\frac{1}{3}$, $x-\frac{1}{2}$, i quali, da negativi che erano quando si poneva 0 in luogo di x, diventano entrambi positivi; ma se si fosse posto per x un numero compreso tra $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{2}$, avrebbe cangiato di segno il solo fattore $x-\frac{1}{3}$, e si sarebbe ottenuto un risultamento negativo.

Si cadrà necessariamente sopra un somigliante numero tutte le volte che si sostituiranno in vece di x numeri, la cui differenza sia minore di quella delle radici $\frac{1}{3}$ ed $\frac{1}{2}$. Se, per esempio, si fanno le sostituzioni $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{4}{7}, \frac{5}{7}$, ec., si troveranno due cangiamenti di segno.

All' esempio riportato qui sopra potrebbe obbiettarsi, che quando si sono fatti sparire i coefficienti frazionari da un' equazione, essa non può avere per radici che numeri interi o irrazionali, e non già frazioni; ma è facile vedere che i numeri irrazionali, ai quali per maggior semplicità abbiamo quivi sostituito frazioni, possono differir tra loro per meno dell'unità.

In generale i risultamenti saranno dello stesso segno ogni qual volta le sostituzioni cangeranno il segno ad un numero pari di fattori (*). Per ovviare a tale inconveniente, è d' uopo porre tra i numeri da sostituirsi, dal più piccolo limite sino al più grande, una differenza minore della più piccola delle differenze che aver possono fra loro le radici dell'equazione proposta; con questo mezzo le sostituzioni cadranno necessariamente tra le radici consecutive, e non faranno cangiar di segno che ad un solo fattore (**). Questa operazione non richiede già che si conosca la più piccola differenza tra le radici reali, ma solamente

(*) Non è dunque possibile di scoprire con questo metodo le radici uguali quando sono di numero pari; ma allora si adopera quello del n° 203.

(**) Qui non si tiene alcun conto delle radici immaginarie, perchè desse sono sempre di numero pari, e si aggruppano a due a due in fattori reali di secondo grado, i quali non cangiano affatto di segno per qualunque valore che diasi ad x. (Si vegga il *Complemento.*)

che abbiasi un limite al di sotto del quale essa non potrebbe cadere.

Per procurarsi cotesto limite, si formerà l'equazione ai quadrati delle differenze delle radici (208).

Sia

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} \ldots + tz + u = 0 \ldots \quad (D),$$

questa equazione; onde ottenere il più piccolo limite delle sue radici, si farà $z = \frac{1}{v}$ (212), e verrà

$$\frac{1}{v^n} + p\frac{1}{v^{n-1}} + q\frac{1}{v^{n-2}} \ldots\ldots + t\frac{1}{v} + u = 0,$$

ovvero, riducendo tutti i termini al medesimo denominatore,

$$1 + pv + qv^2 \ldots\ldots\ldots + tv^{n-1} + uv^n = 0;$$

poi dividendo per u, otterrassi

$$v^n + \frac{t}{u}v^{n-1} \ldots\ldots\ldots + \frac{q}{u}v^2 + \frac{p}{u}v + \frac{1}{u} = 0;$$

e se $\frac{r}{u}$ rappresenta il massimo coefficiente negativo di questa equazione, si avrà

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} < z.$$

E qui non bisogna considerare che il limite positivo, essendo questo il solo che si rapporta alle radici reali della proposta.

Conoscendo il limite

$$\frac{1}{\frac{r}{u}+1} = \frac{u}{r+u},$$

minore del quadrato della più piccola differenza tra le radici della proposta, se ne estrarrà la radice quadrata, o almeno si prenderà il numero razionale immediatamente al di sotto di questa radice; questo numero, che indicherò con k, denoterà l'intervallo che bisognerà porre tra ciascuno dei numeri da sostituirsi. Si formeranno così le due serie

$$0,\quad +k,\quad +2k,\quad +3k,\quad \text{ec.},$$
$$-k,\quad -2k,\quad -3k,\quad \text{ec.},$$

delle quali non si prenderanno che i termini compresi tra i limiti della minore e della maggiore delle radici positive, e tra quelli della minore e della maggiore delle radici negative dell'equazione proposta. I cangiamenti di segno che offrirà la serie dei risultamenti ottenuti mediante la sostituzione di ciascuno di questi numeri in luogo di x nell'equazione proposta, manifesteranno le diverse radici reali di lei, tanto positive, che negative.

218. Serva d'esempio l'equazione

$$x^3-7x+7=0,$$

la quale nel n° 208 mi ha condotto all'equazione

$$z^3-42z^2+441z-49=0;$$

facendo $z=\frac{1}{v}$, ed ordinando il risultamento di questa sostituzione rispetto a v, si ha

$$v^3-9v^2+\frac{42}{49}v-\frac{1}{49}=0,$$

da cui si trae

$$v<10,\qquad z>\frac{1}{10}:$$

bisognerà dunque prendere $k=$, o pure $<\frac{1}{\sqrt{10}}$. Si soddisfarebbe a questa condizione prendendo $k=\frac{1}{4}$; ma basta sup-

porre $k=\frac{1}{3}$; perciocchè, mettendo nell' equazione precedente 9 in luogo di v, si ottiene un risultamento positivo, il quale non può diventare che maggiore quando si darà a v un valore più considerevole, perchè i termini v^3 e $9v^2$ di già si distruggono, e $\frac{42}{49}v$ supera $\frac{1}{49}$.

Il maggior limite delle radici positive dell'equazione proposta

$$x^3-7x+7=0$$

è 8, e quello delle radici negative è -8; avranno dunque a sostituirsi per x i numeri

$$0,\quad \frac{1}{3},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{3},\quad \frac{4}{3},\ldots\ldots\ldots \quad \frac{24}{3},$$

$$-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},-\frac{3}{3},-\frac{4}{3},\ldots\ldots\ldots -\frac{24}{3}.$$

Si potranno evitare le frazioni facendo $x=\frac{x'}{3}$; perchè allora le differenze tra i valori di x' saranno triple di quelle che si trovano tra i valori di x, e supereranno in conseguenza l'unità: non si avranno più così che a sostituire successivamente i numeri

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\ldots\ldots \quad 24,$$

$$-1,-2,-3,\ldots\ldots -24$$

nell'equazione

$$x'^3-63x'+189=0.$$

I segni dei risultamenti cangeranno da $+4$ a $+5$, da $+5$ a $+6$, e da -9 a -10, di maniera che si avranno i valori

positivi

$$\left.\begin{array}{l} x' > 4 \quad \text{e} \quad < 5 \\ x' > 5 \quad \text{e} \quad < 6 \end{array}\right\}, \text{ e di qui } \left\{\begin{array}{l} x > \frac{4}{3} \quad \text{e} \quad < \frac{5}{3} \\ x > \frac{5}{3} \quad \text{e} \quad < \frac{6}{3}\,; \end{array}\right.$$

ed il valore negativo di x' cadendo tra -9 e -10, quello di x sarà tra $-\frac{9}{3}$ e $-\frac{10}{3}$.

Conoscendo ora le diverse radici dell'equazione proposta, per meno di $\frac{1}{3}$ circa differenti dal vero di loro valore, potremmo approssimarci sempre di più al valor vero, come nel numero 215.

219. Ciò che si è praticato sull'esempio del n° 215 e su quello del numero precedente, si applicherà ad un'equazione di grado qualunque, e farà conoscere i valori approssimati di tutte le radici reali di tale equazione. Non si può peraltro disconvenire che il calcolo diventi penoso, qualora l'equazione proposta si eleva un poco di grado; ma in molti casi non sarà necessario di ricorrere all'equazione (D), o pure vi si potrà supplire con mezzi, che lo studio dei rami ulteriori dell'Analisi farà conoscere (*).

Farò intanto osservare che le sostituzioni successive dei numeri 0, 1, 2, 3, ec. in luogo di x offrono spesso indizi bastanti per far sospettare dell'esistenza delle radici la cui differenza è minore dell'unità. Nell'esempio, di cui mi sto occupando, dette sostituzioni danno i risultamenti

$$+7, \quad +1, \quad +1, \quad +13,$$

i quali tornano ad esser crescenti dopo essere stati decrescenti da $+7$ a $+1$. Questo andamento retrogrado porta naturalmente a credere che tra i due numeri $+1$ e $+2$ cadano

(*) Si può anche vedere nel *Trattato della Risoluzione delle Equazioni numeriche* un metodo elegantissimo dato da Lagrange, per evitare l'uso dell'equazione (D). Altri geometri hanno pure arricchito questo soggetto di procedimenti ingegnosi, ma che neanche mi sembrano di dovere entrare negli elementi.

due radici, o uguali, o quasi uguali. Per verificare questo sospetto, bisogna moltiplicare l'incognita. Facendo $x = \frac{y}{10}$, si trova

$$y^3 - 700y + 7000 = 0,$$

equazione che ha due radici positive, una tra 13 e 14, l'altra tra 16 e 17.

Il numero dei tentativi necessari per iscoprire queste radici non è grandissimo; poichè y non dee cercarsi che tra 10 e 20; e i valori di questa incognita essendo determinati in numeri interi, se ne deducono quelli di x, che differiscono dal vero per meno d'un decimo circa dell'unità.

220. Allorchè i coefficienti dell'equazione che si dee risolvere sono numeri considerevolissimi, torna conto di trasformarla in un'altra, i coefficienti della quale siano chiusi tra limiti più ristretti. Se si avesse, per esempio,

$$x^4 - 80x^3 + 1998x^2 - 14937x + 5000 = 0,$$

si farebbe $x = 10z$, e si otterrebbe

$$z^4 - 8z^3 + 19,98z^2 - 14,937z + 0,5 = 0.$$

Contentandosi di prendere in questo risultamento i numeri interi che più si approssimano ai coefficienti, in tale supposto si avrebbe

$$z^4 - 8z^3 + 20z^2 - 15z + 0,5 = 0.$$

Si troverebbe senza pena che z ha due valori reali compresi tra 0 ed 1, e tra 1 e 2, dal che segue che due radici reali della proposta sono tra 0 e 10, e tra 10 e 20; ma ciò non dev'essere riguardato che come un'indicazione, la quale ha bisogno d'essere verificata; imperocchè può benissimo accadere, che un piccolo cangiamento nei coefficienti di un'equazione renda immaginarie talune radici che prima erano reali, e reciprocamente.

Non farò qui punto parola della ricerca delle radici immaginarie, perchè dessa è appoggiata sopra principii, la cui esposizione mi condurrebbe troppo lontano; la rimetto perciò al *Complemento* di questo Trattato.

221. Lagrange ha dato alle sostituzioni successive una for-

ma che ha il vantaggio di far conoscere immediatamente in ciascuna operazione di quanto uno si sia approssimato alla vera radice, e che non richiede che se n'abbia in principio un valore che differisca dal vero per meno di un decimo circa.

Rappresento con a il numero intero immediatamente minore della radice cercata; altro non bisognerà, per ottenere questa radice, che aumentare a di una frazione: si avrà dunque $x=a+\frac{1}{y}$. L'equazione in y, che risulterà dalla sostituzione di questo valore nella proposta, avrà necessariamente una radice maggiore dell'unità; chiamando b il numero intero immediatamente al di sotto di questa radice, verrà per una seconda approssimazione $x=a+\frac{1}{b}$. Ma b rispetto ad y non essendo che ciò che a è rispetto ad x, si potrà nell'equazione in y fare $y=b+\frac{1}{y'}$, ed y' sarà necessariamente maggiore dell'unità; chiamando b' il numero intero immediatamente al di sotto della radice dell'equazione in y', si avrà

$$y=b+\frac{1}{b'}=\frac{bb'+1}{b'}:$$

rimettendo questo valore in quello di x, ne risulterà

$$x=a+\frac{b'}{bb'+1}$$

pel terzo valore approssimato di x. Se ne troverà un quarto facendo $y'=b'+\frac{1}{y''}$; poichè se b'' dinota il numero intero immediatamente al di sotto di y'', si avrà

$$y'=b'+\frac{1}{b''}=\frac{b'b''+1}{b''},$$

e quindi

$$y = b + \frac{b''}{b'b''+1} = \frac{bb'b''+b''+b}{b'b''+1},$$

$$x = a + \frac{b'b''+1}{bb'b''+b''+b},$$

e così di seguito.

222. Passo ad applicare questo metodo all' equazione

$$x^3 - 7x + 7 = 0.$$

Si è già veduto (218) che la più piccola delle radici positive di questa equazione era tra $\frac{4}{3}$ e $\frac{5}{3}$, cioè, tra 1 e 2; farò dunque $x = 1 + \frac{1}{y}$, ed avrò

$$y^3 - 4y^2 + 3y + 1 = 0.$$

Il limite delle radici positive di quest' ultima è 5; e sostituendo successivamente 0, 1, 2, 3, 4 in luogo di y, si conoscerà ben presto che essa ha due radici maggiori dell' unità, cioè, una tra 1 e 2, e l' altra tra 2 e 3: ne risulterà dunque

$$x = 1 + \frac{1}{1} \quad \text{ed} \quad x = 1 + \frac{1}{2},$$

vale a dire,

$$x = 2 \quad \text{ed} \quad x = \frac{3}{2}.$$

Questi due valori corrispondono a quelli che ho trovati tra $\frac{6}{3}$ e $\frac{5}{3}$, tra $\frac{5}{3}$ e $\frac{4}{3}$, e che differiscono tra loro per meno di un' unità.

Per spingere più avanti il grado d'esattezza della prima

radice, la quale corrisponde ad $y=1$, si farà

$$y=1+\frac{1}{y'},$$

e si avrà

$$y'^3-2y'^2-y'+1=0.$$

In questa equazione non si troverà che una sola radice maggiore dell'unità, e compresa tra 2 e 3, il che darà

$$y=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2},$$

e per conseguenza

$$x=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}.$$

Supponendo in seguito $y'=2+\frac{1}{y''}$, ne risulterà

$$y''^3-3y''^2-4y''-1=0;$$

Si troverà y'' tra 4 e 5, e prendendo il più piccolo limite 4, verrà

$$y'=2+\frac{1}{4},\quad y=1+\frac{4}{9}=\frac{13}{9},\quad x=1+\frac{9}{13}=\frac{22}{13}.$$

Niente è più facile del proseguire con questo metodo, facendo $y''=4+\frac{1}{y'''}$, e così di seguito.

Ritorno ora al secondo valore di x, che ho trovato eguale a $\frac{3}{2}$ per una prima approssimazione, e che corrisponde ad $y=2$: fo $y=2+\frac{1}{y'}$, e sostituisco nell'equazione in y; avrò, dopo di aver cangiati i segni per rendere il primo ter-

mine positivo,

$$y'^3 + y'^2 - 2y' - 1 = 0.$$

Questa equazione, come la sua corrispondente nell' operazione fatta di sopra, non avrà che una sola radice che sorpassa l'unità, cioè, tra 1 e 2; e prendendo $y' = 1$, ne risulterà

$$y = 3, \qquad x = \frac{4}{3}.$$

Ponendo ancora

$$y' = 1 + \frac{1}{y''}$$

si otterrà

$$y''^3 - 3y''^2 - 4y'' - 1 = 0,$$

equazione che dà y'' tra 4 e 5, e da ciò conseguentemente segue

$$y' = \frac{5}{4}, \qquad y = \frac{14}{5}, \qquad x = \frac{19}{14}.$$

Per andare più avanti, si farà $y'' = 4 + \frac{1}{y'''}$, e così di seguito.

L'equazione $x^3 - 7x + 7 = 0$ ha pure una radice negativa compresa tra -3 e -4. Per approssimarvisi di più, farassi $x = -3 - \frac{1}{y}$, il che darà

$$y^3 - 20y^2 - 9y - 1 = 0, \qquad y > 20 \text{ e } < 21,$$

e da ciò risulterà

$$x = -3 - \frac{1}{20} = -\frac{61}{20}.$$

Spingendo il calcolo più oltre, si supporrà $y = 20 + \frac{1}{y'}$, ec.,

e si otterranno successivamente valori di più in più esatti.

Ciascuna delle diverse trasformate in y, y', y'', ec., avrà sempre una sola radice maggiore dell'unità, quando tra i limiti a ed $a+1$ non vi sarà compresa che una sola radice della proposta; ma quando tra i limiti a ed $a+1$ saranno comprese due, o più di due radici della proposta, come è accaduto nell'esempio di sopra, in alcune delle equazioni in y, y', ec. si troveranno parecchi valori maggiori dell'unità, dai quali partiranno le serie d'equazioni che faranno conoscere in particolare le diverse radici che ha la proposta tra i limiti a ed $a+1$.

Il lettore potrà esercitarsi ulteriormente sopra l'equazione

$$x^3-2x-5=0,$$

la cui radice reale cada tra 2 e 3; ei troverà pei valori interi di y, y', ec.

$$10,\ 1,\ 1,\ 2,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,\ 12,\ \text{ec.},$$

e pei valori approssimati di x

$$\frac{2}{1},\ \frac{21}{10},\ \frac{23}{11},\ \frac{44}{21},\ \frac{111}{53},\ \frac{155}{74},\ \frac{576}{275},\ \frac{731}{349},\ \frac{1307}{624},\ \frac{16415}{7837}.$$

Delle proporzioni, e delle progressioni.

223. Ho esposto nell'Aritmetica la definizione e le proprietà fondamentali della *proporzione* e dell'*equidifferenza*, vale a dire di ciò che si chiamava la *proporzione geometrica*, e la *proporzione aritmetica;* applicherò ora l'Algebra a queste nozioni e perverrò con tal mezzo ad alcuni risultamenti, che sono di un uso frequente nella Geometria.

Comincerò dal far osservare che l'equidifferenza, e la proporzione possono esprimersi con equazioni. Siano A, B, C, D i quattro termini della prima; a, b, c, d quelli della seconda; si avrà

$$B-A=D-C \text{ (Aritm. 127)},\quad \frac{b}{a}=\frac{d}{c} \text{ (Aritm. 111)},$$

equazioni che debbono essere riguardate come equivalenti alle

espressioni

$$A \, . \, B : C \, . \, D \, , \qquad a : b :: c : d \, ,$$

e che danno

$$A + D = B + C \, , \qquad ad = bc.$$

Da ciò segue che *nell'equidifferenza la somma dei termini estremi eguaglia quella dei termini medii*, *e che nella proporzione il prodotto dei termini estremi è uguale a quello dei termini medii*, appunto come è stato dimostrato nell'Aritmetica (127, 113) con ragionamenti dei quali le equazioni di sopra non sono che la traduzione.

Le proposizioni reciproche delle precedenti si dimostrano facilmente ; poichè dalle equazioni

$$A + D = B + C \, , \qquad ad = bc$$

si torna immediatamente a

$$B - A = D - C \, , \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c} \, ,$$

ed in conseguenza *allorchè quattro quantità sono tali*, *che due tra loro danno la medesima somma o il medesimo prodotto che le altre due*, *le prime sono i medii e le seconde gli estremi (o reciprocamente) di un' equidifferenza o di una proporzione.*

Quando $B = C$, l'equidifferenza vien detta *continua*; lo stesso accade della proporzione quando $b = c$; e si avrà allora

$$A + D = 2B \, , \qquad ad = b^2 :$$

vale a dire che *in un' equidifferenza continua la somma degli estremi è uguale al doppio del termine di mezzo*, e che *in una proporzione continua il prodotto degli estremi è uguale al quadrato del termine medio.* Ricavasi da ciò

$$B = \frac{A + D}{2} , \qquad b = \sqrt{ad} ;$$

la quantità B è il *termine medio* (ovvero la *media proporzionale aritmetica*) tra A e D, e la quantità b la *media proporzionale* (*geometrica*) tra a e d.

Le equazioni fondamentali

$$B - A = D - C, \qquad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

conducono ancora alle seguenti

$$C - A = D - B, \qquad \frac{c}{a} = \frac{d}{b};$$

e ciò dimostra che nelle espressioni $A . B : C . D$, $a : b :: c : d$ si possono cangiare i medii di posto, e dedurne $A . C : B . D$, $a : c :: b : d$. In generale potranno farsi tutte le trasposizioni di termini, che andranno d' accordo colle equazioni

$$A + D = B + C \qquad \text{ed} \qquad ad = bc \text{ (Aritm. 114).}$$

Pongo ora da parte l'equidifferenza, per non occuparmi che della sola proporzione.

224. Si può ai due membri dell' equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ aggiungere o togliere una medesima quantità m; ciò facendo, si avrà

$$\frac{b}{a} \pm m = \frac{d}{c} \pm m;$$

riducendo i termini di ciascun membro al medesimo denominatore, si otterrà

$$\frac{b \pm ma}{a} = \frac{d \pm mc}{c},$$

equazione che può esser posta sotto la forma

$$\frac{c}{a} = \frac{d \pm mc}{b \pm ma},$$

e che riducesi alla proporzione seguente

$$b \pm ma : d \pm mc :: a : c;$$

e siccome $\frac{c}{a} = \frac{d}{b}$, si avrà parimente

$$\frac{d \pm mc}{b \pm ma} = \frac{d}{b},$$

ovvero $\quad b \pm ma : d \pm mc :: b : d.$

Queste due proporzioni possono enunciarsi così: *Il primo conseguente, più o meno un certo numero di volte il suo antecedente, sta al secondo conseguente, più o meno il medesimo numero di volte il di lui antecedente, come il primo termine sta al terzo, o come il secondo sta al quarto.*

Paragonando separatamente le somme tra loro, e le differenze tra loro, si avrà

$$\frac{d+mc}{b+ma} = \frac{c}{a}, \qquad \frac{d-mc}{b-ma} = \frac{c}{a},$$

e da questo si conchiuderà

$$\frac{d+mc}{b+ma} = \frac{d-mc}{b-ma},$$

vale a dire,

$$b + ma : d + mc :: b - ma : d - mc,$$

oppure, mutando i medii di posto,

$$b + ma : b - ma :: d + mc : d - mc;$$

e se si fa $m = 1$, si avrà solamente

$$b + a : b - a :: d + c : d - c,$$

il quale risultamento si enuncia così:

La somma dei due primi termini sta alla loro differenza, come la somma dei due ultimi sta alla loro differenza.

225. La proporzione $a:b::c:d$ potendo essere scritta come segue

$$a:c::b:d,$$

si avrà $$\frac{c}{a}\pm m=\frac{d}{b}\pm m,$$

quindi $$\frac{c\pm ma}{a}=\frac{d\pm mb}{b},$$

e finalmente

$$c\pm ma:d\pm mb::a:b, \text{ ovvero } ::c:d;$$

dal che risulta che *il secondo antecedente, più o meno un certo numero di volte il primo, sta al secondo conseguente, più o meno lo stesso numero di volte il primo, come uno qualunque degli antecedenti sta al suo conseguente.*

Questa proposizione può ancora dedursi immediatamente da quella del numero precedente; poichè, cangiando i medii di posto nella proporzione primitiva

$$a:b::c:d,$$

e poi applicandovi la proposizione citata, si ottiene successivamente

$$a:c::b:d,$$

$$c\pm ma:d\pm mb::a:b, \text{ ovvero } ::c:d;$$

e dando in quest' ultima alle lettere a, b, c, d la denominazione che esse hanno nella proporzione primitiva, si ottiene il precedente enunciato.

Facendo $m=1$, se ne ricaveranno le proporzioni particolari

$$c\pm a:d\pm b::a:b$$
$$::c:d,$$
$$c+a:c-a::d+b:d-b;$$

il che vuol dire che *la somma o la differenza degli antecedenti sta alla somma o alla differenza dei conseguenti , come un antecedente sta al suo conseguente* , e che *la somma degli antecedenti sta alla loro differenza, come la somma dei conseguenti sta alla loro differenza.*

In generale , sia una serie di frazioni uguali

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c}=\frac{f}{e}=\frac{h}{g}=\text{oc.},$$

e facciasi $\frac{b}{a}=q$; si avrà

$$\frac{d}{c}=q,\quad \frac{f}{e}=q,\quad \frac{h}{g}=q,\quad \text{ec.},$$

il che darà

$$b=aq,\quad d=cq,\quad f=eq,\quad h=gq,\quad \text{ec.};$$

e sommando queste equazioni membro a membro , verrà

$$b+d+f+h+\text{ec.}=aq+cq+eq+gq+\text{ec.},$$

ovvero

$$b+d+f+h+\text{ec.}=q(a+c+c+g+\text{cc.}),$$

dalla quale equazione si deduce

$$\frac{b+d+f+h+\text{cc.}}{a+c+e+g+\text{ec.}}=q=\frac{b}{a}.$$

Enunciasi questo risultamento dicendo che *in una serie di rapporti uguali* a : b : : c : d : : e : f : : g : h : : ec. *la somma di un numero qualunque di antecedenti sta alla somma di un egual numero di conseguenti, come un antecedente sta al suo conseguente.*

226. Allorchè si hanno le due equazioni

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},\qquad \text{ed}\qquad \frac{f}{c}=\frac{h}{g},$$

si possono moltiplicare i primi membri di esse tra loro, e i secondi membri parimente tra loro, e si otterrà

$$\frac{bf}{ae}=\frac{dh}{cg},$$

equazione equivalente alla proporzione

$$ae : bf :: cg : dh,$$

la quale si otterrebbe altresì moltiplicando ciascun termine della proporzione

$$a : b :: c : d$$

per quello che gli corrisponde nella proporzione

$$e : f :: g : h.$$

Due proporzioni moltiplicate in siffatta maniera termine per termine, si dicono *moltiplicate per ordine*; ed i prodotti che ne risultano sono, come si vede, in proporzione: i nuovi rapporti sono i rapporti *composti* dai rapporti primitivi (*Aritm.* **123.**)

È facile convincersi che si perverrebbe egualmente ad una proporzione, dividendo due proporzioni termine per termine, ovvero per *ordine*.

227. Allorchè si ha

$$\frac{b}{a}=\frac{d}{c},$$

se ne può conchiudere che

$$\frac{b^m}{a^m}=\frac{d^m}{c^m},$$

il che dà

$$a^m : b^m :: c^m : d^m;$$

quindi è che *i quadrati, i cubi, ed in generale le potenze simili di quattro quantità in proporzione, sono anche in proporzione.*

La stessa cosa avrebbe luogo per le potenze frazionarie; perciocchè essendo

$$\sqrt[m]{\frac{b}{a}}=\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}},$$

e

$$\sqrt[m]{\frac{d}{a}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[m]{c}},$$

ne risulterà

$$\frac{\sqrt[m]{b}}{\sqrt[m]{a}}=\frac{\sqrt[m]{d}}{\sqrt[n]{c}},$$

ovvero

$$\sqrt[m]{a}:\sqrt[n]{b}::\sqrt[m]{c}:\sqrt[m]{d},$$

tutte le volte che starà $a:b::c:d$: e ciò vuol dire, che *le radici del medesimo grado di quattro quantità in proporzione sono esse pure in proporzione.*

Tali sono i principali punti della teoria delle proporzioni. Questa teoria non è stata inventata che per iscoprire alcune quantità, paragonandole ad altre quantità. Sono stati conservati per lungo tempo i nomi latini annessi ai diversi cangiamenti, o trasformazioni, cui può essere assoggettata una proporzione: si principia oggigiorno a non caricarne più la memoria di quelli che studiano le Matematiche; e tutto l'apparato delle proporzioni diverrebbe inutile, se ad esse si sostituissero le equazioni corrispondenti, la qual cosa darebbe, secondo il mio avviso, più uniformità ai metodi, e più nettezza alle idee.

228. Dalle proporzioni alle progressioni il passaggio è facile. Avendo concepito nell'equidifferenza continua tre quantità, di cui l'ultima superava la seconda di tanto, di quanto questa superava la prima, si è subito immaginato di considerare un numero indefinito di quantità a, b, c, d, ec. tali, che ciascuna di esse superasse quella che la precede di una

medesima quantità δ, di maniera che fosse

$$b = a + \delta, \quad c = b + \delta, \quad d = c + \delta, \quad e = d + \delta, \text{ ec.}$$

La serie formata da queste quantità si scrive così

$$\div\, a \,.\, b \,.\, c \,.\, d \,.\, e \,.\, f \,.\, \text{ec.},$$

e si chiamava *progressione aritmetica*; ma io ho creduto di dover mutare questo nome in quello di *progressione per differenza*. (Si vegga *Arit.*, nota del n° 127).

Si può calcolare un termine qualunque di questa progressione, senza il soccorso de' termini intermedii. In fatti, se si pone per b il suo valore in quello di c, ne risulterà

$$c = a + 2\delta;$$

mediante quest' ultimo si troverà

$$d = a + 3\delta, \qquad \text{poi} \qquad e = a + 4\delta,$$

e così di seguito; e da ciò si rende manifesto che chiamando l il termine il cui posto fosse indicato da n, avrebbesi

$$l = a + (n - 1)\,\delta.$$

Sia, per esempio, la progressione

$$\div\; 3 \,.\, 5 \,.\, 7 \,.\, 9 \,.\, 11 \,.\, 13 \,.\, 15 \,.\, 17 \,.\, \text{ec};$$

qui il primo termine $a = 3$, la differenza (ovvero la *ragione*) $\delta = 2$; si troverà per l' ottavo termine

$$3 + (8 - 1)2 = 17,$$

al quale numero si perviene di fatto calcolando successivamente tutti i termini che precedono l' ottavo.

La progressione che ho considerata, era *crescente*; scrivendola con ordine inverso nel modo seguente:

$$\div\, 17 \,.\, 15 \,.\, 13 \,.\, 11 \,.\, 9 \,.\, 7 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1 \,.\, -1 \,.\, -3, \text{ec.},$$

essa sarebbe *decrescente*. Se ne troverebbe ancora un termine qualunque mediante la formula $a + (n - 1)\delta$, osservando che δ vi deve essere supposto negativo, poichè allora la differenza

dee togliersi da un termine qualunque per ottenere il termine seguente.

229. Si giunge pure semplicissimamente a conoscere la somma d'un numero qualunque di termini della progressione per differenza. Questa progressione essendo rappresentata da

$$\div a \,.\, b \,.\, c \,.\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, .\, i \,.\, k \,.\, l,$$

ed S designando la somma di tutti i suoi termini, si avrà

$$S = a + b + c \ldots\ldots\ldots\ldots + i + k + l.$$

Scrivendo i termini del secondo membro di questa equazione in un ordine inverso del precedente, si avrà pure

$$S = l + k + i \ldots\ldots\ldots\ldots + c + b + a.$$

Se queste equazioni si sommano, e si riuniscono i termini che si corrispondono, emergerà

$$2S = (a+l) + (b+k) + (c+i) \ldots\ldots + (i+c) + (k+b) + (l+a);$$

ma per la natura della progressione, partendo dal primo termine, si ha

$$a + \delta = b,\quad b + \delta = c, \ldots\ldots\ i + \delta = k,\quad k + \delta = l,$$

ed in conseguenza, partendo dall' ultimo,

$$l - \delta = k,\quad k - \delta = i, \ldots\ldots\ c - \delta = b,\quad b - \delta = a:$$

l' addizione delle equazioni corrispondenti fa subito vedere che

$$a + l = b + k = c + i, \text{ ec.},$$

e che per conseguenza

$$2S = n(a + l);$$

e da questa equazione deducesi

$$S = \frac{n(a + l)}{2}.$$

Applicando questa formola alla progressione

$$\div\ 3\ .\ 5\ .\ 7\ .\ 9\ .\ \text{ec.},$$

si troverà per la somma degli otto primi termini

$$\frac{(3+17)8}{2}=80.$$

230. L'equazione

$$l=a+(n-1)\delta,$$

unita all'altra

$$S=\frac{(a+l)n}{2},$$

porge il mezzo di trovare due qualunque delle cinque quantità a, δ, n, l ed S, allorchè si conoscono le altre tre; e siccome le dette equazioni sono semplicissime, non mi tratterrò su i diversi casi che possono presentarsi.

231. Dalla proporzione è stata cavata la progressione per *quoziente* (ovvero la progressione *geometrica*), la quale consiste in una serie di termini tali, che il quoziente di un termino diviso per quello che lo precede, è sempre lo stesso, in qualunque luogo siano presi questi due termini. Le serie

$$\div\!\!\div\ 2:6:18:54:162:\text{ec.},$$

$$\div\!\!\div\ 45:15:5:\frac{5}{3}:\frac{5}{9}:\text{ec.}$$

sono progressioni di questo genere; il quoziente (ovvero la *ragione*) è 3 nell'una, e $\frac{1}{3}$ nell'altra: la prima è crescente, e la seconda decrescente. Ciascuna di queste progressioni forma una serie di rapporti eguali, e perciò esse si scrivono nella maniera di sopra indicata.

Sia

$$\div\!\!\div\ a:b:c:d\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ k:l$$

una progressione qualunque per quoziente; facendo $\frac{b}{a}=q$, avrò, per la natura di questa progressione,

$$q=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=\frac{e}{d}\ldots=\frac{l}{k},$$

ossia $b=aq$, $c=bq$, $d=cq$, $e=dq$, ... $l=kq$.

Ponendo successivamente il valore di b in quello di c, quest' ultimo in quello di d, e così degli altri, verrà

$$b=aq,\ c=aq^2,\ d=aq^3,\ e=aq^4,\ \ldots.\ l=aq^{n-1},$$

denotando con n il posto del termine l, ovvero il numero dei termini che si considerano nella progressione proposta.

Mediante la formola $l=aq^{n-1}$ si può calcolare un termine qualunque senza passare per tutti i termini intermedii. Per esempio, il decimo termine della progressione

$$\div\!\div\ 2:6:18:\text{ec.}$$

è uguale a $2\times 3^9=39366$.

232. Si può ottenere altresì la somma di quanti termini si vogliano della progressione

$$\div\!\div\ a:b:c:d:\text{ec.},$$

sommando tra loro le equazioni

$$b=aq,\quad c=bq,\quad d=cq,\quad e=dq,\ \ldots..\ l=kq,$$

perchè ne risulterà

$$b+c+d+e\ldots.+l=(a+b+c+d\ldots+k)q;$$

e chiamando S la somma cercata, si avrà

$$b+c+d+e\ \ldots.+l=S-a,$$
$$a+b+c+d\ \ldots.+k=S-l,$$

e da ciò si conchiuderà

$$S-a=q(S-l),$$

e per conseguenza

$$S = \frac{ql - a}{q - 1}.$$

Nell' esempio dato di sopra troverebbesi per la somma dei primi dieci termini della progressione

$$\div 2 : 6 : 18 : \text{ec.}$$

il numero

$$\frac{2 \times 3^{10} - 2}{2} = 3^{10} - 1 = 59048.$$

233. Le due equazioni

$$l = aq^{n-1}, \qquad S = \frac{ql - a}{q - 1}$$

contengono le relazioni che le cinque quantità a, q, n, l ed S debbono avere tra loro nella progressione per quoziente, e faranno conoscere due qualunque di queste quantità, allorchè le altre tre saranno date.

234. Se si sostituisce aq^{n-1} in luogo di l nell' espressione di S, verrà

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}.$$

Allorchè q supererà l'unità, la quantità q^n sarà tanto più grande, quanto il numero n sarà più considerevole; ed S sarà suscettibile di superare qualunque quantità per grande cho si voglia, dando ad n un valore convenevole, cioè a dire, prendendo un numero sufficiente di termini della progressione proposta.

Ma se q è una frazione rappresentata da $\frac{1}{m}$, si avrà

$$S = \frac{a\left(\frac{1}{m^n} - 1\right)}{\frac{1}{m} - 1} = \frac{am\left(1 - \frac{1}{m^n}\right)}{m - 1} = \frac{am - \frac{a}{m^{n-1}}}{m - 1};$$

ed è evidente che quanto più il numero n diverrà grande, tanto più il termine $\frac{a}{m^{n-1}}$ diverrà piccolo, e più per conseguenza il valore di S si approssimerà alla quantità $\frac{am}{m-1}$, dalla quale esso non differisce che di

$$\frac{a}{(m-1)m^{n-1}}:$$

dunque quanti più termini si prenderanno della progressione proposta, tanto più la loro somma si approssimerà ad $\frac{am}{m-1}$. Essa potrà differirne anche meno di qualunque quantità per quanto piccola si possa assegnare, senza poterle essere mai rigorosamente uguale.

La quantità $\frac{am}{m-1}$, che denoterò con L, è, come vedesi, un limite, al quale le somme parziali rappresentate da S, si approssimano di più in più.

Applicando queste considerazioni alla progressione

$$\because 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \text{ec.},$$

si avrà

$$a = 1, \qquad q = \frac{1}{m} = \frac{1}{2},$$

e per conseguenza

$$m = 2, \qquad L = \frac{am}{m-1} = 2;$$

e quanti più termini si prenderanno della divisata progressione, tanto più la loro somma si approssimerà ad essere ugua-

le a 2. Trovasi in fatti

$$1 = 1 = 2 - 1\ ,$$

$$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 2 - \frac{1}{2}\ ,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4} = 2 - \frac{1}{4}\ ,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{15}{8} = 2 - \frac{1}{8}\ ,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = \frac{31}{16} = 2 - \frac{1}{16}\ ,$$

ec.

L'espressione di L può essere considerata come la somma della progressione decrescente per quoziente, continuata all'infinito; e così di fatto vien presentata ordinariamente; ma con tutto ciò non può concepirsene un' idea ben chiara e distinta, se non ravvisandola sotto l'aspetto di un limite.

335. Si possono ricavare dall' espressione

$$S = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$$

tutti i termini che compongono la progressione e de' quali essa rappresenta la somma; poichè, se si effettua la divisione di $q^n - 1$ per $q - 1$ (158), si troverà

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 \ldots\ldots + q^{n-1}\ ,$$

il che dà

$$S = a + aq + aq^2 \ldots\ldots + q^{n-1}.$$

Il valore di L soddisfa allo stesso fine, allorchè si effettua la divisione di m per $m-1$, come segue:

$$\begin{array}{l|l} m & m-1 \\ \hline -m+1 & 1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.} \\ \hline -1+\frac{1}{m} & \\ \quad -\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2} & \\ \qquad -\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3} & \\ \qquad\quad \text{ec.} & \end{array}$$

Si divide primieramente m al modo solito pel primo termine del divisore, il che dà per quoziente 1; si moltiplica questo quoziente pel divisore, e si toglie il prodotto dal dividendo; si divide in seguito il resto 1 pel primo termine del divisore; trovasi per quoziente $\frac{1}{m}$, che si moltiplica pel divisore, e si ha per resto $\frac{1}{m}$: si opera su questo resto come sul precedente. Continuando così, si conoscerà ben presto la legge che seguono tutti i quozienti parziali, e si vedrà che l'espressione $\frac{m}{m-1}$ è equivalente alla serie

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^3}+\text{ec.},$$

continuata all'infinito; ponendo per m il suo valore $\frac{1}{q}$, e

moltiplicando per a, si troverà

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \text{ec.}$$

per la progressione di cui L esprime il limite.

236. Lo sviluppo

$$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{m^3} + \text{ec.}$$

vien riguardato come il valore della frazione $\frac{m}{m-1}$, tutte le volte che desso è *convergente*, vale a dire, quando i termini che lo compongono, diminuiscono allontanandosi dal primo.

In fatti, se si termina la precedente divisione successivamente al primo, al secondo, al terzo . . . resto, si trovano

i quozienti	ed i resti
1	1
$1 + \frac{1}{m}$	$\frac{1}{m}$
$1 + \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2}$	$\frac{1}{m^2}$
ec.	ec.

I primi non si approssimano al vero valore, se gli altri non vanno diminuendo; e questa circostanza non ha luogo che quando m supera l'unità. In tutti gli altri casi non è permesso di trascurare i resti, i quali, aumentando incessantemente, mostrano che i quozienti s'allontanano sempre più dal vero valore.

Per illustrare ciò, basta fare successivamente $m = 2$, $m = 1$, $m = \frac{1}{2}$. La prima supposizione dà

$$\frac{m}{m-1} = 2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \text{ec.};$$

e si è già veduto (234) che la serie che compone il secondo membro si approssimava realmente di più in più a 2.

La seconda supposizione mena ad

$$\frac{m}{m-1}=\frac{1}{0}=1+1+1+1+1+1+\text{ec.}$$

Questo risultamento $1+1+1+1+$ ec., continuato all'infinito, dà effettivamente una quantità infinita, come lo richiede la natura dell'espressione $\frac{1}{0}$: pur tuttavia se in questo esempio non si tenesse conto dei resti, si cadrebbe in un'assurdità; perciocchè siccome il divisore moltiplicato pel quoziente dee riprodurre il dividendo, bisogna che sia

$$1=(1+1+1+1+\ldots\ldots\ldots)\times 0;$$

ma il secondo membro è rigorosamente zero; avrebbesi dunque $1=0$.

La terza supposizione conduce a conseguenze non meno assurde, quando si trascurano i resti, e si riguarda la serie che ne risulta, com'esprimente il valore della frazione dalla quale deriva. Facendo $m=\frac{1}{2}$, si trova

$$\frac{m}{m-1}=-1=1+2+4+8+16+\text{ec.},$$

risultamento falso evidentemente. Queste contraddizioni spariscono qualora si osservi l'andamento dei resti.

Nel secondo caso i resti

$$1,\ \frac{1}{m},\ \frac{1}{m^2},\ \frac{1}{m^3},\ \text{ec.}$$

sono tutti eguali ad 1, e poichè i medesimi non diminuiscono, non è permesso di trascurarli, per quanto lontano si spinga la serie. Aggiungendo adunque uno di questi resti al secondo membro dell'equazione

$$1=(1+1+1+1+1+\ldots\ldots)\times 0,$$

essa diviene esatta.

Nel terzo caso i resti

$$1\,,\quad \frac{1}{m}\,,\quad \frac{1}{m^2}\,,\quad \frac{1}{m^3}\,,\quad \text{ec.}$$

formano la progressione crescente 1, 2, 4, 8, 16, ec., ed aggiungendo a ciascun quoziente la frazione che risulta dal resto che accompagna esso quoziente, le espressioni rigorose di $\frac{m}{m-1}$ sono

$$1+\frac{1}{m-1}\,,$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m(m-1)}\,,$$

$$1+\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2(m-1)}\,,$$

ec.,

le quali tutte si accordano a dare -1, allorchè $m=\frac{1}{2}$.

Se si prendesse $m=-n$, la frazione $\frac{m}{m-1}$ diverrebbe $\frac{n}{n+1}$; la serie che esprime lo sviluppo di questa frazione si cangerebbe in

$$1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n^3}\,,\ \text{ec.};$$

e facendovi $n=1$, si avrebbe

$$1-1+1-1+1-1+\text{ec.},$$

serie che diventa alternativamente 1 e 0, e che si allontana in conseguenza ora per eccesso, ora per difetto, dal vero valore di $\frac{n}{n+1}$, eguale in questo caso ad $\frac{1}{2}$: ma la serie suddetta non essendo convergente, non può dare questo vero valore; e bisogna necessariamente tener conto del residuo, qualunque sia il termine in cui essa si arresta.

Se nella serie precedente si suppone $n=2$, si avrà

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\text{ec.},$$

serie di cui le somme parziali $1, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}$, ec. sono alternativamente maggiori e minori del vero valore di $\frac{n}{n+1}$, il quale è $\frac{2}{3}$, ma a questo valore le dette somme si approssimano indefinitamente, perchè la serie proposta è convergente.

Quantunque le serie *divergenti*, vale a dire quelle i cui termini vanno aumentando, si allontanino sempre più dal vero valore dell' espressione dalla quale derivano, pur nondimeno, considerate come sviluppi di queste espressioni, possono far conoscere quelle fra le proprietà delle medesime, le quali non dipendono dalla loro *sommazione*, vale a dire, dalla determinazione della loro somma.

237. Spingendo oltre qualsivoglia divisione algebrica, come ho fatto qui sopra (235) rispetto ad m per $m-1$, si perverrà sempre ad esprimere il quoziente mediante una serie infinita di termini *monomi*. L' estrazione delle radici, continuata della stessa maniera sui resti successivi nel caso delle potenze imperfette, conduce pure a serie infinite; ma queste serie si otterranno più facilmente per mezzo della formola del *binomio*, siccome lo farò vedere nel *Complemento*, dove tratterò delle serie le più conosciute.

Teoria delle quantità esponenziali e dei logaritmi.

238. In tutti i problemi finora risoluti, le incognite non entravano affatto negli esponenti; ma non sarebbe lo stesso se si volesse determinare il numero dei termini di una progressione per quoziente, il cui primo termine, l'ultimo e la ragione fossero dati. Ed in vero avrebbesi, per determinare quel numero, l'equazione

$$l = aq^{n-1} \quad (231),$$

nella quale l'incognita sarebbe n; e facendo, per abbreviare, $n - 1 = x$, si otterrebbe $l = aq^x$. Coi metodi diretti esposti precedentemente non si saprebbe risolvere questa equazione; e le quantità come x non possono essere rappresentate da veruno dei segni fin qui adoperati. Per meglio rischiarare questo soggetto, rammenterò, seguendo le orme di Euler, il legame che esiste fra le diverse operazioni dell'Algebra, e come ciascuna di esse dia origine ad una nuova specie di quantità.

239. Sieno a e b due quantità che si vogliono sommare insieme: si avrà

$$a + b = c;$$

e se da questa equazione vogliasi ricavare a o b, si troverà

$$a = c - b, \qquad b = c - a:$$

ecco, come ognun vede, l'origine della sottrazione: ora quando quest'ultima operazione non può effettuarsi nell'ordine secondo il quale è indicata, il risultamento diviene negativo.

L'addizione ripetuta di una medesima quantità genera la moltiplicazione: a denotando il moltiplicatore, b il moltiplicando, e c il prodotto, si ha

$$ab = c,$$

dalla quale eguaglianza si trae

$$a = \frac{c}{b}, \qquad b = \frac{c}{a};$$

e di qui nascono la divisione e le frazioni, le quali sono una conseguenza della divisione, quando questa operazione non può effettuarsi senza resto.

La moltiplicazione ripetuta di una quantità per sè stessa produce le potenze di questa quantità; esprimendo con b il numero delle volte che a è fattore nella potenza che si considera, si avrà

$$a^b = c.$$

Questa equazione differisce essenzialmente dalle precedenti in questo, che le quantità a e b non vi entrano ambedue della stessa maniera, e da ciò segue che non si può risolvere l'equazione per rapporto all'una come per rapporto all'altra. Se si cerca a, una semplice estrazione di radice basta a trovarla, e questa operazione dà luogo ad una nuova specie di quantità, cioè, le irrazionali; ma la determinazione di b dipende da metodi particolari che farò conoscere quando avrò esposto le principali proprietà dell'equazione $a^b = c$.

240. È facile vedere che conservando lo stesso valore per la lettera a, che supporrò maggiore dell'unità, e variando convenevolmente quello di b, si potranno ottenere per c tutti i numeri possibili. Di fatto, facendo $b = 0$, si ha $c = 1$; poi, allorchè b crescerà, i valori corrispondenti di c sorpasseranno di più in più la unità, e potranno aumentare quanto vorrassi. Il contrario avrà luogo se si prenderà b negativo; poichè l'equazione $a^b = c$ cangiandosi allora in $a^{-b} = c$, ovvero in $\frac{1}{a^b} = c$, i valori di c andranno sempre diminuendo, e potranno divenire tanto piccoli quanto si vorrà. Si possono adunque dalla medesima equazione cavare tutti i numeri positivi possibili, sì interi che frazionarl, nel caso in cui a supera l'unità. Sarebbe lo stesso se si avesse $a < 1$: solamente i valori di c progredirebbero in senso inverso di quelli del caso precedente; ma supponendo $a = 1$, si troverebbe sempre $c = 1$, qualunque valore si desse a b: si dee adunque in tutto ciò che è per seguire, riguardare a come differente essenzialmente dalla unità.

Per meglio indicare che a non cangia di valore e che le altre due quantità b e c sono indeterminate, rappresenterò queste con le altre lettere x e y, ed avrò l'equazione $a^x = y$, nella quale a ciascun valore di y corrisponde un valore di x, per modo che una di queste quantità è determinata dall'altra, e reciprocamente.

241. Questa genesi di tutti i numeri per mezzo delle diverse potenze di un solo, è importantissima, non solamente in rapporto all'Algebra, ma altresì a cagione dei potenti soccorsi che porge per abbreviare i calcoli numerici. Ed in fatti, se si considera un altro numero y', e s'indichi con x' il valore corrispondente di x, si avrà $a^{x'} = y'$, ed in conseguenza, se si moltiplica y per y', verrà

$$yy' = a^x \times a^{x'} = a^{x+x'};$$

se si divide, si troverà

$$\frac{y'}{y} = \frac{a^{x'}}{a^x} = a^{x'-x};$$

finalmente, se si prendono la potenza m^{esima}, e la radice n^{esima} di y, si otterrà

$$y^m = (a^x)^m = a^{mx}$$

per l'una, ed

$$y^{\frac{1}{n}} = (a^x)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{x}{n}}$$

per l'altra.

Segue dai due primi risultamenti che, conoscendo gli esponenti x ed x' relativi ai numeri y ed y', si troverà, prendendone la somma, l'esponente che corrisponde al prodotto yy'; e prendendone la differenza, quello che corrisponde al quoziente $\frac{y'}{y}$. Le due ultime equazioni poi fanno vedere, che l'esponente relativo alla potenza m^{esima} di y si ottiene mediante una semplice moltiplicazione, e quello che corrisponde alla radice n^{esima}, con una semplice divisione.

È facile conchiudere da ciò, che se si avesse una Tavola nella quale a fianco di ciascuno dei numeri y si trovassero i va-

lori corrispondenti di x, di maniera che essendo dato y si potesse avere x, e reciprocamente, *la moltiplicazione di due numeri qualunque si ridurrebbe ad una semplice addizione*; perchè in vece di operare sopra questi numeri, si sommerebbero i valori di x che vi si rapportano, e cercando dipoi nella tavola il numero al quale corrisponde questa somma, si avrebbe così il dimandato prodotto. Il quoziente dei numeri proposti troverebbesi nella medesima tavola di fronte alla differenza dei valori di x che gli corrispondono, e *la divisione si eseguirebbe allora mediante una sottrazione.*

Questi due esempi fanno bastantemente presentire di quanta utilità possono essere tavole somiglianti a quello delle quali ho parlato; e perciò l'uso n'è molto esteso fin dal tempo di Neper, che fu il primo ad immaginarle. I valori di x vi sono designati sotto il nome di *logaritmi*, e per conseguenza *i logaritmi sono gli esponenti delle potenze alle quali bisogna elevare un numero invariabile, per dedurne successivamente tutti i numeri possibili.*

Il numero invariabile si chiama base *della tavola, o del sistema d i logaritmi.*

In seguito il logaritmo di y verrà rappresentato da ly; così si avrà $x = ly$, ed a motivo di $y = a^x$, verrà $y = a^{ly}$.

242. Le proprietà dei logaritmi essendo indipendenti dai valori particolari del numero a, ovvero dalla base di essi, ne segue potersi formare un' infinità di tavole differenti, dando a cotesto numero tutti i valori possibili, diversi dalla unità. Prendendo a modo d'esempio $a = 10$, si avrà $y = (10)^{ly}$, e si troverà all'istante che i numeri

$$1,\quad 10,\quad 100,\quad 1000,\quad 10000,\quad 100000,\quad \text{ec.},$$

i quali sono le successive potenze di 10, hanno per logaritmi in questa ipotesi i numeri

$$0,\quad 1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5,\ \text{ec.}$$

Si possono già verificare in questa serie le proprietà che si sono enunciate nel numero precedente: sommando i logaritmi di 10 e di 1000, i quali sono 1 e 3, si vede subito che la di loro somma 4 si trova sotto il 10000, ch'è il prodotto dei numeri proposti.

243. I logaritmi dei numeri intermedii tra 1 e 10, 10 e 100, 100 e 1000, ec. non possono ottenersi che per approssimazione. Se si trattasse, per esempio, di avere il logaritmo di 2, bisognerebbe risolvere l'equazione $(10)^x = 2$, applicandovi il metodo dato nel n° 221, e trovare in primo luogo il numero intero il più prossimo al valore di x. Si vede subito che x è tra 0 e 1, poichè $(10)^0 = 1$, $(10)^1 = 10$; si farà dunque $x = \frac{1}{z}$, ed otterrassi $(10)^{\frac{1}{z}} = 2$, oppure $10 = 2^z$;

ora z si trova tra 3 e 4: si supporrà dunque $z = 3 + \frac{1}{z'}$, e ne risulterà

$$10 = 2^{3 + \frac{1}{z'}} = 2^3 \times 2^{\frac{1}{z'}} = 8 \times 2^{\frac{1}{z'}},$$

ovvero
$$2^{\frac{1}{z'}} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4},$$

o finalmente
$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{z'}.$$

Il valore di z' cadendo tra 3 e 4, si farà

$$z' = 3 + \frac{1}{z''};$$

si otterrà così

$$2 = \left(\frac{5}{4}\right)^{3 + \frac{1}{z''}} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 \left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}},$$

dalla quale equazione si caverà

$$\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{1}{z''}}=2\left(\frac{4}{5}\right)^3=\frac{128}{125},\ \text{ovvero}\ \left(\frac{128}{125}\right)^{z''}=\frac{5}{4};$$

e dopo un piccol numero di tentativi si troverà che z'' cade tra 9 e 10. Nella stessa maniera si potrà progredire quanto vorrassi; ma siccome non ho indicato questo metodo che per mostrare la possibilità di trovare i logaritmi di tutti i numeri, così mi limiterò a supporre $z''=9$; e risalendo, si otterrà

$$z'=\frac{28}{9},\qquad z=\frac{93}{28},\qquad x=\frac{28}{93}.$$

Questo valore di x, ridotto in decimali, è esatto sino alla quarta cifra inclusivamente, poichè esso dà

$$x=0{,}30107\,;$$

e calcoli portati ad un maggior grado di rigore, hanno fatto conoscere che, spingendo l'approssimazione fino a sette decimali, si avrebbe

$$x=0{,}3010300.$$

Per interpetrare questo valore di x come quello di un esponente, bisogna concepire che se s'innalza il numero 10 alla potenza indicata dal numero 3010300, e poi dal risultamento si estrae la radice del grado 10000000, si avrà un numero che si approssima grandemente a 2; vale a dire che $(10)^{\frac{3010300}{10000000}}=2$, con pochissima differenza: il primo membro è un poco più grande di 2, ma il numero $(10)^{\frac{3010299}{10000000}}$ sarebbe più piccolo (*).

(*) Il metodo indicato in questo numero non sarebbe praticabile per i numeri un poco grandi, ma eccone un altro dato da Long, geometra inglese, nelle *Transazioni Filosofiche* per l'anno 1724, n.° 339, il quale può essere utilissimo.

244. Moltiplicando successivamente per 2, 3, 4, ec. il

La determinazione di x nell' equazione $(10)^x = y$ essendo laboriosissima, si può procedere in un ordine inverso, cioè supporre dato x per ottenere y, e formare una tavola dei valori di y corrispondenti a quelli di x, la quale servirà in seguito, come or ora vedrassi, a determinare x per y.

Si prendono in primo luogo per x valori da 0,1 fino a 0,9, e tutto si riduce a determinare il valoro di y, che corrisponde ad $x=0,1$, il quale valore è $(10)^{\frac{1}{10}}$, perchè gli altri valori di y, cioè:

$$(10)^{\frac{2}{10}},\ (10)^{\frac{3}{10}},\ \text{ec.},$$

sono le potenze 2.ª, 3.ª, ec. della prima.

L' estrazione della redice quadrata fa primieramente conoscere

$$(10)^{\frac{1}{2}} \text{ ovvero } (10)^{\frac{5}{10}} = 3,162277660;$$

poi estraendo la radice quinta da questo resultamento, si perviene a

$$(10)^{\frac{1}{10}} = 1,258925412.$$

Mediante un metodo simile si caverà da

$$(10)^{\frac{1}{10}} = 1,258925412$$

il volore di

$$\sqrt{(10)^{\frac{1}{10}}} = (10)^{\frac{1}{20}} = (10)^{\frac{5}{100}} = 1,122018454;$$

poi prendendo la radice quinta, si formerà

$$(10)^{\frac{1}{100}} = 1,023292992;$$

e risalendo alle potenze 2.ª, 3ª ....., 9.ª, si otterranno i valori di y corrispondenti a quelli di x, da 0,01 sino a 0,09.

logaritmo di 2, ottengonsi quelli dei numeri 4, 8, 16, ec.

Si concepisce facilmente che in questa maniera si formeranno ancora i valori di y per mezzo di quelli di x, da 0,001 fino a 0,009, e da 0,0001 fino a 0,0009, ec., e che si potrà comporre la tavola seguente:

Log.	Numeri Naturali	Log.	Numeri Natur.
0,9	7,943282347	0,00009	1,000207254
8	6,309573445	8	1,000184221
7	5,011872336	7	1,000161194
6	3,981071706	6	1,000138165
5	3,162277660	5	1,000115136
4	2,511886432	4	1,000092108
3	1,995262315	3	1,000069080
2	1,584893192	2	1,000046053
1	1,258925412	1	1,000023026
0,09	1,230268771	0,000009	1,000020723
8	1,202264435	8	1,000018421
7	1,174897555	7	1,000016118
6	1,148153621	6	1,000013816
5	1,122018454	5	1,000011513
4	1,096478196	4	1,000009210
3	1,071519305	3	1,000006908
2	1,047128548	2	1,000004605
1	1,023292992	1	1,000002303
0,009	1,020939484	0,0000009	1,000002072
8	1,018591388	8	1,000001842
7	1,016248693	7	1,000001612
6	1,013911386	6	1,000001382
5	1,011579454	5	1,000001151
4	1,009252886	4	1,000000921
3	1,006931669	3	1,000000691
2	1,004615790	2	1,000000461
1	1,002305238	1	1,000000230
0,0009	1,002074475	0,00000009	1,000000207
8	1,001843766	8	1,000000184
7	1,001613109	7	1,000000161
6	1,001382506	6	1,000000138
5	1,001151956	5	1,000000115
4	1,000921458	4	1,000000092
3	1,000691014	3	1,000000069
2	1,000460623	2	1,000000046
1	1,000230285	1	1,000000023

che sono le potenze seconda, terza, quarta, ec. di 2.
Sommando col logaritmo di 2 i logaritmi di 10, di 100,

Col magistero di questa tavola si troverà il logaritmo di un numero qualunque, dividendolo per 10 un numero sufficiente di volte. A fine di ottenere, per esempio, quello di 2549, si dividerà in primo luogo questo numero per $(10)^3$, cioè per 1000, che è la massima potenza di 10, ad esponente intero, in esso contenuta, e si avrà

$$2549 = (10)^3 \times 2{,}549;$$

poi si cercherà nella tavola la potenza di 10 immediatamente al disotto di 2,549, che si trova essere

$$(10)^{0,4} = 2{,}511886432,$$

e dividendo 2,549 per quest' ultimo numero, verrà

$$2{,}549 = (10)^{0,4} \times 1{,}014775177.$$

Cercando ancora nella tavola la potenza di 10 immediatamente al di sotto di 1,014775177, si troverà

$$(10)^{0,006} = 1{,}013911386;$$

poi dividendo per questo numero il quoziente precedente 1,014775177, si avrà un terzo quoziente

$$1{,}000851742.$$

Si continuerà ad operare in questo modo fino a che si giunga ad un quoziente, il quale differisca dall' unità per quell' ordine di decimali, che uno si è proposto di trascurare.

Riguardando qui il terzo quoziente come egoale all' unità, il numero proposto sarà risoluto in fattori, i quali saranno tante potenze di 10, poichè si avrà

$$2549 = (10)^3 \times (10)^{0,4} \times (10)^{0,006} = (10)^{3,406};$$

dal che si rende manifesto che 3,406 è il logaritmo del numero 2549. Spingendo le divisioni sino al numero di 7, si troverà che questo logaritmo è 3,406369.

La medesima tavola serve ancora più facilmente a trovare un numero per via del suo logaritmo; eccone un esempio.

Sia 2,547 il logaritmo dato; il numero cercato sarà

$$(10)^{2,547} = (10)^2 \times (10)^{0,5} \times (10)^{0,04} \times (10)^{0,007};$$

di 1000, ec., se ne deducono quelli di 20, di 200, di 2000, ec.; ed è evidente che basta avere i logaritmi dei numeri primi, per trovare i logaritmi di tutti i numeri composti, i quali non possono essere che potenze, o prodotti di numeri primi. Il numero 210, per esempio, essendo eguale a

$$2 \times 3 \times 5 \times 7,$$

il suo logaritmo sarà eguale a

$$l2 + l3 + l5 + l7,$$

ed a motivo che $5 = \frac{10}{2}$, si avrà

$$l5 = l10 - l2.$$

245. I logaritmi, che sono sempre espressi in decimali, sono necessariamente composti di due parti, cioè, delle unità poste alla sinistra della virgola, e delle cifre decimali le quali si trovano alla destra. La prima porta il nome di *caratteristica*, perchè nei logaritmi che io ora considero, i quali risultano dalla supposizione di $a = 10$, e si chiamano *logaritmi ordinari*, questa parte fa conoscere in quale ordine di unità cada il numero, di cui si ha il logaritmo. Tutti i logaritmi dei numeri compresi tra 1 e 10, cadendo tra 0 ed 1, hanno necessariamente 0 per caratteristica; tutti quelli dei numeri

esso dunque sarà eguale al prodotto dei numeri

$$(10)^2 = 100,$$
$$(10)^{0,5} = 3,16227766o,$$
$$(10)^{0,04} = 1,09647819б,$$
$$(10)^{0,007} = 1,01624869З,$$

presi nella tavola citata; e si avrà in conseguenza

$$2,547 = l.352,357.$$

Nel 1742, a Londra, Dodson ha pubblicato, sotto il titolo di *Anti-logarithmic Canon*, una tavola della medesima specie di quella qui esposta, ma molto più estesa, e di cui l'oggetto è di far trovare a qual numero corrisponda un logaritmo dato. Si vegga pure nelle Memorie dell'*Accademia* di *Berlino*, per gli anni 1786—1787, pagina 456, una tavola analoga, molto estesa, calcolata dal Signor Burja, col mezzo della quale ho corretto alcuni sbagli in quella di Long.

compresi tra 10 e 100, hanno 1; tutti quelli dei numeri compresi tra 100 e 1000, hanno 2: in generale, *la caratteristica di un logaritmo ha tante unità, quante cifre ha il numero proposto, meno una.*

246. Un'osservazione non meno importante è questa, che i logaritmi dei numeri, i quali sono decupli gli uni degli altri, hanno la medesima parte decimale: per esempio,

54360 ha per log.	4,7352794,
5436	3,7352794,
543,6	2,7352794,
54,36	1,7352794,
5,436	0,7352794;

poichè ciascuno di questi numeri essendo il quoziente di quello che lo precede diviso per 10, il logaritmo dell'uno si ottiene togliendo un'unità dalla caratteristica dell'altro (241, 242).

247. Dietro a ciò che è stato detto nel n.° 240, i logaritmi dei numeri frazionari sono negativi nell'ipotesi attuale; e si deducono facilmente da quelli dei numeri interi, osservando che una frazione rappresenta il quoziente della divisione del numeratore pel denominatore. Quando il numeratore è minore del denominatore, il suo logaritmo è pure più piccolo di quello del denominatore, ed in conseguenza, togliendo l'ultimo dal primo, si ha un resto negativo.

Per ottenere, a cagion d'esempio, il logaritmo della frazione $\frac{1}{2}$, si toglierà da 0, che esprime il logaritmo di 1, la frazione 0,3010300, che rappresenta quello di 2, e verrà

$$-0,3010300.$$

Togliendo da 0 il numero 1,3010300, che è il logaritmo di 20, si avrà il logaritmo di $\frac{1}{20}$ eguale a

$$-1,3010300;$$

il logaritmo poi di 3 essendo 0,4771213, quello di $\frac{2}{3}$ sarà

$$0,3010300-0,4771213=-0,1760913.$$

248. Dalla maniera colla quale si ottengono i logaritmi delle frazioni, fatta astrazione dal loro segno, si vede che essi appartengono (241) al quoziente della divisione del denominatore pel numeratore, e corrispondono in conseguenza al numero pel quale bisognerebbe dividere l'unità, ondo ottenere la frazione proposta. Di fatto $\frac{2}{3}$, per esempio, può esser posto sotto la forma $\frac{1}{\frac{3}{2}}$, e $l\,\frac{3}{2} = l3 - l2 = 0{,}1760913$.

Ciò non ostante per trovare il valore della frazione alla quale appartiene un logaritmo negativo dato, sarebbe poco comodo cercare il numero a cui corrisponde allorchè desso è positivo; poichè bisognerebbe effettuare la divisione della unità per questo numero. Ma se si toglie questo logaritmo da 1, 2, 3, ec. unità, il resto apparterrà al numero, che esprime la frazione cercata, allorchè si converte in decimali; poichè questa sottrazione corrisponde alla divisione dei numeri 10, 100, 1000, ec. pel numero cui appartiene il logaritmo proposto considerato positivamente.

Sia per esempio, $-\,0{,}3010300$; se, non avendo riguardo al suo segno, si tolga questo logaritmo da 1, ovvero da 1,0000000, il resto 0,6989700 corrispondendo a 5, fa vedere che la frazione cercata è eguale a 0,5; poichè si è supposta l'unità composta di 10 parti.

Se, quando cercasi il logaritmo d'una frazione, si concepisca immediatamente l'unità formata di 10, oppure di 100, di 1000, ec. parti; ovvero, il che torna lo stesso, se si aumenti la caratteristica del logaritmo del numeratore di un numero d'unità sufficiente perchè se ne possa fare la sottrazione di quello del denominatore, si avrà in siffatta maniera un logaritmo positivo, il quale potrà essere adoperato invece di quello che è stato indicato di sopra.

A fine di porre uniformità nei calcoli, si aumenta quasi sempre di 10 unità la caratteristica del logaritmo del numeratore. Relativamente alla frazione $\frac{2}{3}$, per esempio, si ha

$$10{,}3010300 - 0{,}4771213 = 9{,}8239087.$$

È facile vedere che questo logaritmo sorpassa di 10 unità il logaritmo negativo $-\,0{,}1760913$, e che in conseguenza ogni

qual volta verrà sommato con altri, s'introdurranno 10 unità di più nel risultamento; ma la sottrazione di queste 10 unità non dee contarsi per un'operazione, ed allorchè sarà effettuata, si sarà eseguita nel tempo stesso quella di 0,1760913. Di fatti, sia N il numero al quale si aggiunge il logaritmo positivo 9,8239087; il risultamento dell'operazione sarà rappresentato da

$$N + 10 - 0,1760913;$$

e se se ne toglie 10, resterà solamente

$$N - 0,1760913.$$

In virtù di ciò che precede, la sottrazione si cangia in addizione, adoperando, in luogo del numero da sottrarsi, il suo *complemento aritmetico*, vale a dire il residuo che nasce togliendo questo numero da uno dei numeri 10, 100, 1000, ec., residuo che si ottiene *togliendo da* 10 *le unità semplici del numero proposto*, *e tutte le altre da* 9: ciò fatto, si aggiunge questo complemento al numero dal quale bisognerebbe sottrarre il proposto, o si toglie dalla somma un'unità dell'ordine su di cui si è preso il complemento.

È evidente che se il complemento sia ripetuto più volte, bisognerà togliere, dopo l'addizione tante unità dell'ordine sul quale è stato preso il complemento, quanto ne sono nel di lui moltiplicatore; e per la stessa ragione, se si adoperano più complementi, sarà necessario di togliere per ciascuno la unità sulla quale è stato preso, ovvero tanto unità quanti sono i complementi, se tutti sian presi sopra una stessa unità.

Qualche volta questa sottrazione non può effettuarsi; il risultamento è allora il complemento aritmetico del logaritmo di una frazione, e corrisponde nelle tavole all'espressione di questa frazione convertita in decimali. Quando restano ancora 10 unità da togliersi dalla caratteristica, che è il caso più ordinario, è come se si fosse moltiplicato per 10000000000 il numeratore della frazione cercata, onde effettuarne la divisione per lo denominatore; la caratteristica del logaritmo del quoziente fa conoscere qual sia l'ordine il più elevato delle unità, contenute in questo quoziente, relativamente a quelle del dividendo. In 9,8239087 la caratteristica 9 dimostra che il quoziente deve avere una cifra di meno del numero, pel quale si è moltiplicata l'unità; ed in conseguenza, se per ridurre il quoziente al suo vero valore, si separano 10 cifre decimali, la sua prima cifra significativa verso la sinistra esprimerà

decimi: e parimente esprimerebbe centesimi, millesimi, ec., se i complementi aritmetici avessero le caratteristiche 8, 7, ec.

249. Ciò che è stato detto sul *sistema* di logaritmi nel quale $a=10$, contiene i principî generali necessarî per l'intelligenza delle tavole, le quali sono quasi tutte precedute da un'istruzione relativa alla loro disposizione particolare ed alla maniera di servirsene, alla quale istruzione invio i lettori. Indicherò loro frattanto le tavole di Callet (edizione stereotipa) e le tavole di Borda, come quelle che sono estesissime e comodissime.

250. Quando si ha il logaritmo d'un numero y per un valore particolare di a, vale a dire per una base particolare, è facile di ottenere il logaritmo del medesimo numero in qualunque altro sistema. Ed in vero, come per la base a hassi $a^x = y$, così per un'altra base A si avrà $A^X = y$, X essendo differente da x. Sarà dunque $A^X = a^x$. E prendendo i logaritmi relativamente al sistema la cui base è a, verrà

$$\mathrm{l}.A^X = \mathrm{l}.a^x:$$

ora $\mathrm{l}.a^x = x$ per ipotesi, e $\mathrm{l}.A^X = \mathrm{X}\mathrm{l}A$ (241): dunque $\mathrm{X}\mathrm{l}A = x$, e quindi $\mathrm{X} = \frac{x}{\mathrm{l}A}$. Ma considerando A come base, X è il logaritmo di y nel sistema relativo a questa base: se dunque s'indicherà quest'ultimo con Ly, per distinguerlo dall'altro, sarà

$$\mathrm{L}y = \frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{l}A},$$

e però *si troverà il logaritmo di* y *nel secondo sistema, dividendo il suo logaritmo preso nel primo pel logaritmo della base del secondo sistema.*

L'equazione precedente dà pure $\frac{\mathrm{l}y}{\mathrm{L}y} = \mathrm{l}A$, il che dimostra che, qualunque sia il numero y, esiste sempre tra i logaritmi ly e Ly un rapporto invariabile, rappresentato da lA.

251. In qualunque sistema si voglia, il logaritmo di **1** è sempre **0**; poichè qualunque sia a, si ha sempre $a^0 = 1$. Allorchè a è > 1, i logaritmi essendo suscettibili d'accrescimento indefinito a misura che i numeri aumentano, si dice che essi divengono infiniti nel medesimo tempo che i numeri; e siccome quando y è un numero frazionario, si ha $y = \frac{1}{a^x} = a^{-x}$, si

vede che più y diminuisce, più x deve aumentare negativamente, ma che tuttavia non si può mai assegnare per x un numero il quale renda y esattamente nullo. Tale è il senso nel quale bisogna intendere che *il logaritmo di zero è uguale all'infinito negativo*, come si trova scritto in molte tavole.

252. Passo ora ad alcuni esempî dell'uso che si può fare dei logaritmi nella valutazione numerica delle formole.

Dal n.° 241 e dalla definizione dei logaritmi, la quale dà luogo all'equazione $a^{ly} = y$, segue chiaramente che

$$l(AB) = lA + lB, \quad l\left(\frac{A}{B}\right) = lA - lB,$$
$$l.A^m = mlA, \qquad lA^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}lA.$$

Applicando ora queste regole alla formola

$$\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}},$$

la quale è assai complicata, si troverà

$$l(A^2\sqrt{B^2 - C^2}) = l[A^2\sqrt{(B+C)(B-C)}] =$$
$$2lA + \frac{1}{2}l(B+C) + \frac{1}{2}l(B-C),$$
$$l(C\sqrt[5]{D^3EF}) = lC + \frac{3}{5}lD + \frac{1}{5}lE + \frac{1}{5}lF,$$

ed in conseguenza

$$l\left(\frac{A^2\sqrt{B^2 - C^2}}{C\sqrt[5]{D^3EF}}\right) =$$

$$2lA + \frac{1}{2}l(B+C) + \frac{1}{2}l(B-C) - lC - \frac{3}{5}lD - \frac{1}{5}lE - \frac{1}{5}lF.$$

Se si prendessero i complementi aritmetici di lC, $\frac{3}{5}lD$, $\frac{1}{5}lE$, $\frac{1}{5}lF$, e s'indicassero con C', D', E', F', in luogo del risultamento precedente, si avrebbe

$$2lA + \frac{1}{2}\,l(B+C) + \frac{1}{2}\,l(B-C) + C' + D' + E' + F',$$

avvertendo però di togliere dalla somma tante unità dell'ordine sul quale sono stati presi i complementi, quanti sono questi complementi, vale a dire, 4. Quando uno sarà pervenuto al logaritmo della formola proposta, le tavole faranno conoscere il numero al quale appartiene questo logaritmo, e questo numero è appunto il valore cercato della proposta formola.

253. L'uso il più frequente dei logaritmi è quello che se ne fa per trovare il quarto termine d'una proporzione. Di fatti è manifesto che, se $a : b :: c : d$, si avrà

$$d = \frac{bc}{a}, \quad \text{e quindi} \quad ld = lb + lc - la;$$

vale a dire che *il logaritmo del quarto termine cercato è uguale alla somma dei logaritmi de'due medii, diminuita del logaritmo dell'estremo cognito*, ovvero *alla somma dei logaritmi dei medii, più il complemento aritmetico del logaritmo dell'estremo cognito.*

254. Se si prendono i logaritmi di ciascun membro dell'equazione $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, la quale esprime il carattere della proporzione, si avrà l'altra equazione

$$lb - la = ld - lc \ (252);$$

e da ciò risulta che i quattro logaritmi

$$la \,.\, lb : lc \,.\, ld$$

formano un'equidifferenza (223).

La serie di equazioni

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} = \frac{e}{d} \text{ ec. (231)}$$

conduce parimente a

$$\text{l}b - \text{l}a = \text{l}c - \text{l}b = \text{l}d - \text{l}c = \text{l}e - \text{l}d \text{ ec.,}$$

e se ne conchiude che alla progressione per quoziente

$$\because a : b : c : d : e : \text{ ec.}$$

corrisponde la progressione per differenza

$$\div \text{l}a . \text{l}b . \text{l}c . \text{l}d . \text{l}e . \text{ ec.,}$$

e che in conseguenza i *logaritmi dei numeri in progressione per quoziente sono in progressione per differenza.*

255. Se si avesse l'equazione $b^z = c$, si risolverebbe facilmente col mezzo dei logaritmi; poichè $\text{l}.b^z$ essendo eguale a $z\text{l}b$, si avrebbe $z\text{l}b = \text{l}c$, ed in conseguenza $z = \frac{\text{l}c}{\text{l}b}$. L'equazione $b^{c^z} = d$ si tratterebbe nella stessa maniera: facendo primieramente $c^z = u$, verrebbe

$$b^u = d, u\text{l}b = \text{l}d, u = \frac{\text{l}d}{\text{l}b}, \text{ ovvero } c^z = \frac{\text{l}d}{\text{l}b};$$

prendendo nuovamente i logaritmi, si troverebbe

$$z\text{l}c = \text{l}\left(\frac{\text{l}d}{\text{l}b}\right) = \text{ll}d - \text{ll}b \quad \text{e} \quad z = \frac{\text{ll}d - \text{ll}b}{\text{l}c}.$$

In quest'ultima espressione $\text{ll}b$ dinota il logaritmo del logaritmo di b, e si ottiene considerando quest'ultimo logaritmo come un numero. Le quantità b^z, b^{c^z}, e tutte quelle che ne derivano, si chiamano *esponenziali.*

Quistioni relative all' interesse del danaro.

256. La teoria delle progressioni per quoziente e quella dei logaritmi trovano la loro applicazione nelle speculazioni concernenti l'interesse del danaro. Per intendere ciò che sono per dire sopra questo soggetto, bisogna sapere che i vantaggi che procura una somma di danaro a colui che la fa valere, cioè che la impiega, sia ai cambî del commercio, sia a far eseguire lavori produttivi, sono tanto maggiori, quante più sono le volte che desso può rinnovar questi cambî, o moltiplicare questi lavori. Segue da ciò, che colui il quale prende ad imprestito una somma di danaro per farla fruttare, debba, nel restituire questa somma alla fine d'un certo tempo, unirvi una retribuzione, per compensare il prestatore dei vantaggi che avrebbesi procurati, se l'avesse impiegata egli stesso. Tale è l'idea che uno deve formarsi dell'interesse del danaro. Per determinare questo interesse, si paragonano tutte le somme a quella di 100 franchi presa per unità, e si conviene su di ciò che dee fruttare quest'ultima alla fine d'un tempo dato, per esempio, di un anno. Non è questo il luogo di esporre le considerazioni che in ciascun genere di speculazioni fanno alzare ed abbassare l'interesse del danaro: tali considerazioni non possono entrare che negli elementi di Aritmetica politica e commerciale, i quali debbono essere pure preceduti da quelli del calcolo delle probabilità; ed il mio oggetto, in ciò che segue, non è che di risolvere alcuni dei problemi che le progressioni per quoziente presentano.

Supporrò, in generale, che siasi convenuto di dare alla fine di un anno per la somma 1 un interesse denotato da r; è evidente che l'interesse d'una somma 100 durante il medesimo tempo, sarà $100r$, e che quello d'una somma qualunque a sarà espresso da ar. Se la durata dell'imprestito è denotata da n, e l'interesse da α, si avrà in generale,

$$\alpha = arn,$$

equazione che farà trovare l'una delle quattro quantità α, a, r ed n, quando le altre tre saranno date. L'ipotesi stabilita qui sopra, è ciò che chiamasi *l'interesse semplice.*

257. Ma se il prestatore, in vece di ritirare ciascun anno il frutto resogli dal capitale impiegato, lo lascia in mano del debitore, per farlo fruttare unitamente allo stesso capitale nell'anno seguente, alla fine di questo anno il capitale avrà acquistato un valore, che si troverà nel modo seguente:

Il capitale primitivo essendo a, aumentato dell' interesse ar, diverrà, alla fine del primo anno,

$$a + ar = a(1+r).$$

Se ora si fa

$$a(1+r) = a',$$

l'interesse della somma a' per un anno essendo $a'r$, il capitale a' diverrà, alla fine del secondo anno,

$$a'(1+r) = a(1+r)^2 = a''.$$

Se il prestatore del danaro non ritira il capitale a'' neppure alla fine di quest'anno, e lo lasca per un terzo anno, alla fine di questo gli sarà dovuto, secondo ciò che precede,

$$a''(1+r) = a(1+r)^3 = a'''.$$

Si vede facilmente che dopo il quarto anno a''' sarà cangiato in

$$a'''(1+r) = a(1+r)^4,$$

e così di seguito; e che in conseguenza la somma data a frutto in principio o le somme da restituirsi alla fine del primo anno, del secondo, del terzo, del quarto, ec. formano questa progressione per quoziente:

$$\div\div\, a : a(1+r) : a(1+r)^2 : a(1+r)^3 : a(1+r)^4 : \text{ec.},$$

di cui il quoziente è $1+r$, ed il termine generale

$$a(1+r)^n = A,$$

il numero n indicando quello degli anni decorsi dall' istante dell' imprestito. In questo caso *l' interesse è composto.*

Sia, per esempio, la tassa dell' interesse del danaro al 5

per 100, vale a dire che per 100 franchi prestati per un anno debbansi restituire 105 franchi; sarà

$$100r=5,\ \text{epperò}\ r=\frac{5}{100}=\frac{1}{20},\ \text{ed}\ 1+r=\frac{21}{20}.$$

Se se si volesse sapere ciò che diventa la somma a, abbandonata, nel senso di sopra espresso, per 25 anni, si avrebbe allora

$$n=25,\qquad \text{ed}\qquad a\left(\frac{21}{20}\right)^{25}$$

in vece della somma primitiva. La 25^{ma} potenza di $\frac{21}{20}$ valutasi prontamente col magistero dei logaritmi, poichè si ha (252)

$$l\left(\frac{21}{20}\right)^{25}=25l\frac{21}{20}=25\ (l21-l20)=0,5297322,$$

il che ne dà

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{25}=3,386\ \text{incirca},\quad A=3,386a;$$

e da ciò si rende manifesto che 1000 franchi prestati nel modo indicato, diverrebbero 3386 franchi al termine di 25 anni, comprendendovi gl' interessi, ec.

Se l' impiego del capitale durasse 100 anni, si troverebbe

$$A=a\left(\frac{21}{20}\right)^{100}=131\ a$$

all'incirca; così 1000 franchi produrrebbero, dopo questo spazio di tempo, una somma di 131000 franchi circa. Questi esempî dimostrano con quale rapidità i fondi s' aumentino per l' accumulamento degl' interessi composti.

258. L'equazione

$$A=a(1+r)^n$$

dà luogo a quattro problemi: il primo, conoscendo a, r ed n, trovare A, si presenta tutte le volte che si cerca ciò che diventi il capitale dopo un numero n di anni; di tal quistione già ne ho dato pocanzi un esempio.

Il secondo, conoscendo A, r, ed n, trovare a, e nel quale viene

$$a=\frac{A}{(1+r)^n},$$

ha per oggetto di determinare il capitale che bisogna impiegare, per aver dritto, dopo un numero n di anni, ad una somma A.

Il terzo, conoscendo a, A ed n, trovare r, conduce alla tassa dell'interesse mediante la somma primitiva, la somma che è stata rimborsata, ed il tempo della durata dell'impiego del danaro; si ha in questo caso

$$1+r=\sqrt[n]{\frac{A}{a}}.$$

Il quarto finalmente, conoscendo A, a ed r, trovare n, non può risolversi che per via dei logaritmi (238, 252). Prendendo quello di ciascun membro dell'equazione proposta, si ottiene

$$lA=la+nl(1+r),$$

e di qui

$$n=\frac{lA-la}{l(1+r)}.$$

Col magistero di quest'ultima formola si trova il numero necessario di anni nei quali deve rimanere impiegato un capitale a, per produrre una somma A.

Per darne un esempio, suppongo che si cerchi il tempo necessario perchè la somma primitiva sia raddoppiata, la

tassa dell'interesse del danaro essendo sempre al 5 per 100; si avrà

$$A = 2a, \quad lA = la + l2,$$

ed in conseguenza

$$n = \frac{l2}{l\frac{21}{20}} = \frac{l2}{l21 - l20} = \frac{0,3010300}{0,0211893} = 14,2$$

all' incirca.

259. Il problema seguente è uno dei più complicati che si propongono ordinariamente sopra questo argomento. Si suppone che il prestatore del danaro collochi ciascun anno una nuova somma, che aggiunge al capitale di quest' anno, e ciò per un numero n di anni; si domanda quale sia alla fine dell' ultimo, l'ammontare di tutte queste somme cumulate coi loro interessi composti. Siano a, b, c, d, ... k le somme impiegate nel primo anno, nel secondo, nel terzo, nel quarto, ec.; la somma a, restando nelle mani del debitore per un numero n di anni, diverrà

$$a(1+r)^n;$$

la somma b, la quale non vi resta che $n-1$ anni, si cangerà in

$$b(1+r)^{n-1};$$

la somma c, prestata per $n-2$ anni solamente, diverrà

$$c(1+r)^{n-2},$$

e così delle altre; finalmente l'ultima somma k, la quale non è impiegata che per un anno, non darà che

$$k(1+r):$$

si avrà dunque

$$A = a(1+r)^n + b(1+r)^{n-1} + c(1+r)^{n-2} \; . \; . \; . \; . + k(1+r).$$

Calcolando separatamente ciascun termine del secondo membro, si otterrà il valore di A.

L'operazione si rende molto più semplice allorchè

$$a=b=c=d\ldots\ldots=k;$$

poichè in tal caso si ha

$$A=a(1+r)^{n}+a(1+r)^{n-1}+a(1+r)^{n-2}\ldots\ldots+a(1+r);$$

il secondo membro di questa equazione forma una progressione per quoziente, della quale progressione il primo termine è $a(1+r)$, l'ultimo $a(1+r)^{n}$, il quoziente $1+r$, e per conseguenza la somma è

$$\frac{a(1+r)^{n+1}-a(1+r)}{r}\quad(232):$$

si avrà dunque allora

$$A=\frac{a(1+r)\left[(1+r)^{n}-1\right]}{r}.$$

Questa equazione offre pure quattro quistioni, corrispondenti a quelle che ho enunciate sull'equazione

$$A=a(1+r)^{n}.$$

260. Gl'impieghi del danaro, che si chiamano *annualità*, sono gl'inversi dell'impiego del danaro precedentemente considerato: poichè in essi il debitore è quegli che restituisce un capitale e i frutti del medesimo, con diversi pagamenti fatti in termini egualmente distanti. I pagamenti effettuati dal debitore avanti l'epoca del rimborso, possono essere considerati come anticipazioni fatte al creditore in conto di questo rimborso, e dei quali il valore dipende dal tempo che passa tra una di queste epoche e l'altra. Così, denotando ciascun pagamento con a, il primo pagamento che ha luogo $n-1$ anni avanti lo spirare dell'ultimo termine, riferito a questo termine, vale necessariamente $a(1+r)^{n-1}$; il secondo, riferito all'istessa epoca, non vale che $a(1+r)^{n-2}$; il terzo, $a(1+r)^{n-3}$, e così degli altri sino all'ultimo, il quale non ha che il valore a. Ma da un altro lato, la somma prestata essendo

rappresentata da A, questa valerà nelle mani del debitore, dopo n anni, un capitale $A(1+r)^n$, che dovrà essere uguale a tutte le anticipazioni riunite che il creditore ha da lui ricevute: si avrà dunque

$$A(1+r)^n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + a(1+r)^{n-3} \ldots\ldots + a,$$

ovvero, calcolando la somma della progressione che forma il secondo membro,

$$A(1+r)^n = \frac{a[(1+r)^n - 1]}{r},$$

equazione nella quale si può prendere alternativamente per incognita la quantità A, che chiamerò *prezzo* dell'annualità, perchè è la somma che rappresenta essa annualità; la quantità a, che è la *quota* dell'annualità; la quantità r, che è la tassa dell'interesse del danaro; e finalmente la quantità n, che esprime la durata dell'annualità.

La determinazione di r dipende da un'equazione di grado tanto più elevato, quanto più n è grande. Si perviene facilmente a questa equazione ponendo

$$1+r=z \text{ ed } \frac{a}{A}=\alpha, \text{ e conseguentemente } r=z-1, a=A\alpha;$$

allora, siccome i due membri dell'equazione trovata più sopra si possono dividere per A, si trova prima

$$z^n = \frac{\alpha(z^n-1)}{z-1}, \text{ e poi } z^{n+1} - (1+\alpha)z^n + \alpha = 0,$$

eliminando il denominatore.

Per trovare n, bisogna ricorrere necessariamente ai logaritmi; si isola da principio $(1+r)^n$, e si ha

$$(1+r)^n = \frac{a}{a-Ar},$$

e prendendo i logaritmi, si ottiene

$$n\mathrm{l}(1+r)=\mathrm{l}a-\mathrm{l}(a-Ar),$$

la quale equazione dà prontamente

$$n=\frac{\mathrm{l}a-\mathrm{l}(a-Ar)}{\mathrm{l}(1+r)}.$$

261. Per mostrare l'uso delle formole scritte qui sopra, le applicherò alla quistione seguente:
Trovare qual somma bisogna dare annualmente per estinguere in 12 anni un debito di 100 franchi una con i frutti di esso durante questo tempo, l'interesse annuale essendo al 5 per 100.
In questo esempio si conoscono le quantità

$$A=100, \qquad n=12, \qquad r=\frac{1}{20},$$

e si domanda l'annualità a; l'equazione

$$A(1+r)^n=\frac{a[(1+r)^n-1]}{r}$$

venendo risoluta per rapporto alla lettera a, somministra

$$a=\frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n-1}.$$

Bisogna mettere in questa espressione i valori delle lettere A, r ed n, e, per maggior facilità, calcolare prima, mediante i logaritmi, la quantità $(1+r)^n$, la quale si riduce a $\left(\frac{21}{20}\right)^{12}$; si troverà così

$$\left(\frac{21}{20}\right)^{12}=1{,}79586.$$

Col mezzo di questo valore si otterrà

$$a=\frac{100.\frac{1}{20}.1,79586}{1,79586-1}=\frac{5.1,79586}{0,79586};$$

e calcolando l'ultima espressione, o immediatamente, o col magistero dei logaritmi, avrassi

$$a=11,2826:$$

sarà dunque necessaria un'annualità di $11^{\text{fr.}}$, 28 per estinguere in 12 anni il capitale $100^{\text{fr.}}$, la tassa annuale dell'interesse essendo al 5 per 100.

Bisogna intanto osservare che facendo n infinita, si ha solamente

$$a=Ar \quad \text{ed} \quad A=\frac{a}{r};$$

a diventa allora ciò che s'intende per rendita *perpetua*; A è il capitale di questa rendita.

L' espressione generale di A, essendo posta sotto la forma

$$A=\frac{a}{r}\left\{1-\frac{1}{(1+r)^n}\right\}=\frac{a}{r}-\frac{a}{r(1+r)^n},$$

fa conoscere la differenza che passa fra $\frac{a}{r}$, capitale di una rendita perpetua a, ed il prezzo di un annualità del medesimo valore.

Si prende spesso per termine di concessioni diverse una durata di 99 anni; sostituendo questo numero in luogo di n, e supponendo l'interesse al 5 p. $\frac{0}{0}$, ossia $r=\frac{1}{20}$, si trova

$$A=20a\left(1-\frac{1}{125}\right)=20a-\frac{4a}{25}$$

per un annualità di 99 anni: il suo prezzo non differisce che di $\frac{1}{125}$ dal capitale di una rendita perpetua dello stesso valore.

262. Maggiori particolarità intorno a siffatte quistioni oltrepasserebbero i limiti che mi ho prescritti; osserverò solamente che, per paragonare il valore di più somme, relativamente a colui che dee pagarle o riceverle, bisogna ridurle alla medesima epoca, val quanto dire, cercare qual capitale esse darebbero ad una stessa epoca. Un banchiere, per esempio, deve una somma a pagabile in n anni; per saldare il suo debito dà un effetto, il cui valore è rappresentato da b, e che dee pagarsi in p anni; riferendo la prima somma al momento in cui egli esegue la sua operazione, essa non vale che $\frac{a}{(1+r)^n}$, perchè questa dev' essere considerata come il valore di un capitale divenuto a dopo n anni; la somma b non vale, per la ragione medesima, all' epoca predetta, che $\frac{b}{(1+r)^p}$: la differenza

$$\frac{a}{(1+r)^n}-\frac{b}{(1+r)^p}$$

esprimerà dunque, secondo che sarà positiva o negativa, la somma che deve dare o ricevere il banchiere per effetto del suo cambio; e se questa somma non potesse pagarsi che dopo q anni, indicando con c il suo valore al momento dell' operazione, diverrebbe

$$c(1+r)^q\ ;$$

di maniera che sarebbe equivalente a

$$\left(\frac{a}{(1+r)^n}-\frac{b}{(1+r)^p}\right)(1+r)^q = a(1+r)^{q-n} - b(1+r)^{q-p}.$$

Le somme $a, b \ldots\ldots k$ nel n° 257 sono state tutte ridotte all' epoca in cui doveva pagarsi la somma A; e nel numero 260 ciascuno dei pagamenti, come pure la somma A, sono stati riportati all' epoca n alla quale l' annualità dovea terminare.

FINE.

ADDIZIONE

Nota indicata nella pagina 90.

Nei n^{ri} 66 e 75 ho interpretate le soluzioni negative coll' esame delle equazioni, ch' esse verificano immediatamente, conforme io n' aveva usato per lo innanzi; e questo mezzo m' è sempre paruto esatto, perchè si tratta solamente di far vedere che queste soluzioni hanno un senso ragionevole, poichè risolvono problemi analoghi al proposto; ma vi sono spesso più maniere di formare questi problemi; e la seguente, che mi comunicò il fu Sig. Français, geometra distinto, professore della Scuola di Artiglieria di Magonza, mi è sembrata più semplice di quella, che si trova in questi Elementi.

» Egli pensa che si debba rimuovere dall' enunciato del problema » del n° 65 l'idea della partenza de' corrieri, per supporli in viaggio » da un tempo indefinito, e che in conseguenza bisognerebbe enun» ciarlo nel modo seguente: *Due corrieri percorrono la medesima stra» da nel medesimo senso C' ABC* (pag. 79); *dopo che hanno cam» minato ciascuno per un tempo qualunque, uno si trova in A nel » momento che l' altro si trova in B; si conoscono le loro velocità, » e la distanza AB : si domanda in qual punto della strada essi » s' incontreranno ?* »

Quest' enunciato conduce alla medesima equazione che quello del n° 65; ma « quando si stabilisce la continuità del movimento, la solu» zione negativa si spiega senza che sia necessario di cangiare la di» rezione di uno dei corrieri. In fatti, poichè il loro movimento non ha » più avuto principio dai punti A e B, ma ambidue, prima dell'istan» te nel quale si suppongono arrivati a questi punti, si erano di già » mossi nella stessa maniera per un tempo indefinito, andando da C' » verso B, è facile concepire che il corriere che in questo punto è » avanti a quello che allora è in A, il quale si muove con velocità » minore, ha dovuto in una certa epoca trovarsi dietro a questo, e in» contrarlo prima del suo arrivo al punto A. Il segno — indica allora » (come nell' applicazione dell' Algebra alla Geometria) che bisogna » prendere la distanza AR' nel senso opposto alla distanza AR, che si » è riguardata come positiva. Il cangiamento da farsi nell'enunciato, » perchè la soluzione negativa diventi positiva, si riduce a stabilire » che i corrieri hanno dovuto incontrarsi prima d' arrivare al punto » A, in vece d' incontrarsi dopo ».

Di fatto, quando si situa il punto R' tra A e C', in luogo di porlo tra A e B, si trova $AB = BR' - AR'$; dal che ne risulta l' equazione $y - x = a$ in luogo di $x - y = a$, la quale si era ottenuta in principio; e non v' è bisogno di cangiare il segno di c, la seconda equazione restando sempre $\frac{x}{b} = \frac{y}{c}$.

Il signor Français applica, non meno felicemente queste consi-

derazioni al caso del n° 75, riguardando i corrieri come mobili assoggettati ad un moto continuo e cominciato da tempo indefinito. Egli enuncia il Problema in questo modo: « *Due mobili si muovono uniformemente sulla medesima retta CB* (pag. 89), *uno* » *nella direzione BC*, *l'altro nella direzione CB*, *con velocità date*; *quello che muovesi nel primo senso si trova in B un numero* » *cognito d' ore prima che l' altro sia pervenuto in A*: *si domanda* » *in qual punto della retta indefinita BC avverrà il loro incontro?*

» La soluzione $x = -48$ chilometri vuol dire che i due mobili » si sono incontrati nel punto R, prima che quello il quale va da C » verso B fosse arrivato al punto A; e che il secondo, il quale va » da B verso C, fosse nel punto C, dove si trova quando l' altro è » nel punto A ».

La posizione assegnata al punto R si verifica osservando che ne risulta $AC = BC - AB = cd - a$, in luogo di $a + cd$, che si era ottenuto in principio (pag. 89), ed in conseguenza $\frac{x}{b} = \frac{cd - a - x}{c}$, equazione che dà $x = 48$.

Di questa maniera non v'è alcuna inversione da farenel senso del moto: in verità le circostanze materiali del problema sono cangiate; e, come già l'ho detto più sopra, ciò prova che esistono parecchi problemi fisici corrispondenti alle medesime relazioni matematiche; ma gli enunciati qui sopra esposti hanno il vantaggio di non ferire la legge di continuità, e si avvicinano così alla considerazione delle linee, le quali dipingono nella maniera la più semplice e la più generale le circostanze del cangiamento dei segni delle grandezze. (Vedete il *Trattato elementare di Trigonometria e d' applicazione dell' Algebra alla Geometria*).